CHAPITRE 4

SYSTEMES DE CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

OBJECTIFS:

→ Etablir les propriétés électrostatiques des conducteurs: champ, potentiel, énergie.

→ Etudier les propriétés d'un système de 2 conducteurs en influence.

→ Appliquer ces résultats aux condensateurs: propriétés, capacité, forces sur les armatures.

I- CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

1- Définitions

➔ Un conducteur est un matériau qui contient des charges mobiles. Ces charges se mettent en mouvement dès qu'elles sont dans un champ électrostatique.

★ exemples:
- métal: $\rightarrow$ porteurs de charge $=$ e^- libres
- gaz ionisé: $\rightarrow$ porteurs de charge $=$ ions
- électrolytes: $\rightarrow$ porteurs de charge $=$ ions

➔ Un conducteur est en équilibre lorsque les charges libres qu'il contient sont toutes au repos.

★ charge libre: barycentre d'un ensemble de porteurs de charge.

2- Propriétés d'un conducteur en équilibre

➔ Le champ électrostatique est nul à l'intérieur de tout conducteur en équilibre:

$\rightarrow$ charges libres au repos $\Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = \vec{0}$

➔ Le potentiel est constant à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur en équilibre.

$\rightarrow \vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad V = C^{\underline{te}}$ à l'intérieur

par continuité, $V = C^{\underline{te}}$ à la surface

★ la surface d'un conducteur en équilibre est une équipotentielle.

★ les lignes de champ sont normales à la surface pour un conducteur chargé

➔ Si le conducteur en équilibre est chargé, cette charge ne peut être que surfacique.

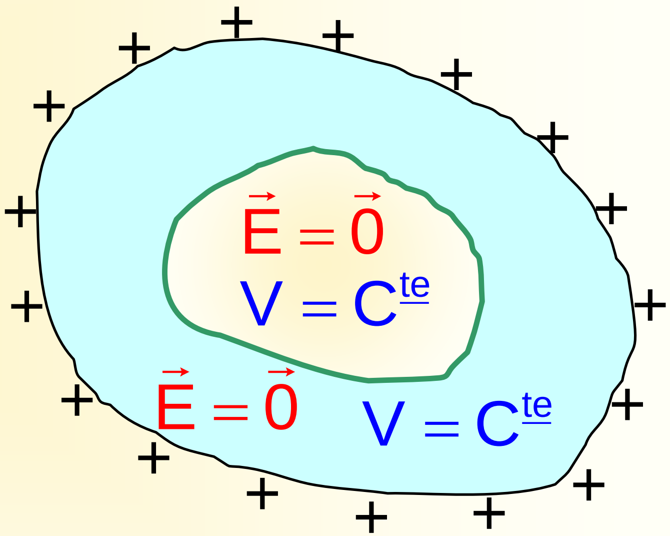
$$\rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = 0 \quad \text{car} \quad \vec{E} = \vec{0}$$

➔ Cas d'un conducteur creux chargé:

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad V = C^{te} \quad \text{partout}$$

→ la surface intérieure est une équipotentielle

→ il ne peut pas y avoir de charges sur la surface intérieure de la cavité



➔ Applications:

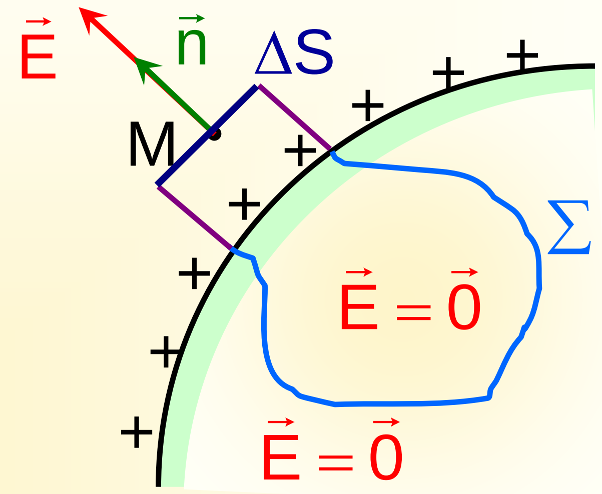
★ charge d'un conducteur, initialement neutre, par contact.

★ cage de Faraday.

3- Champ au voisinage d'un conducteur

a- Théorème de Coulomb

➔ Le champ électrostatique présente une discontinuité à la traversée de la surface d'un conducteur en équilibre.

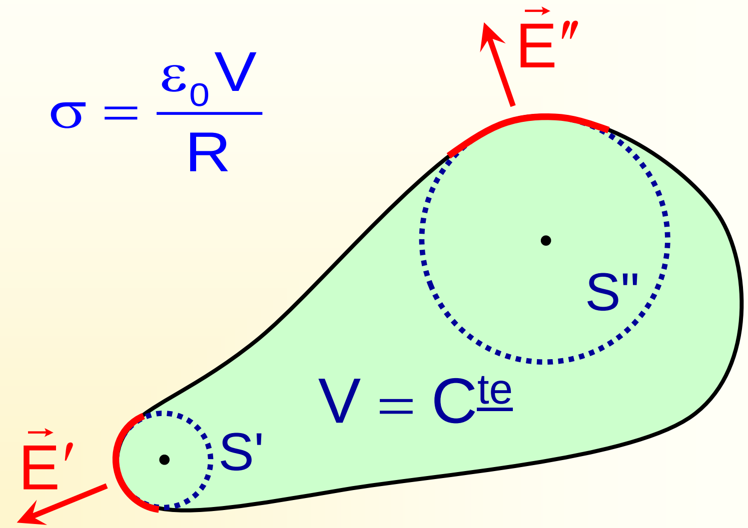


- S surface fermée $= \Sigma$ + tube + ΔS
- M infiniment voisin de la surface du conducteur.
- $\vec{n}$ normale à la surface en M.

$$\Phi_{\vec{E}/S} = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \Phi_{\vec{E}/dS} + \Phi_{\vec{E}/tube} + \Phi_{\vec{E}/\Sigma} = \frac{\sigma\, \Delta S}{\varepsilon_0}$$

d'où $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{n}}$ champ au voisinage d'un conducteur en équilibre

b- "Pouvoir des pointes"



→ Sphère de rayon R au potentiel V: $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R}$

→ Sphère S' de rayon R': $\sigma' = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R'}$

→ Sphère S'' de rayon R'': $\sigma'' = \dfrac{\varepsilon_0 V}{R''}$

★ Au voisinage de la surface, $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$R' \;□\; R'' \quad \Rightarrow \quad \sigma' \;□\; \sigma'' \quad \Rightarrow \quad \underline{E' \;□\; E''}$

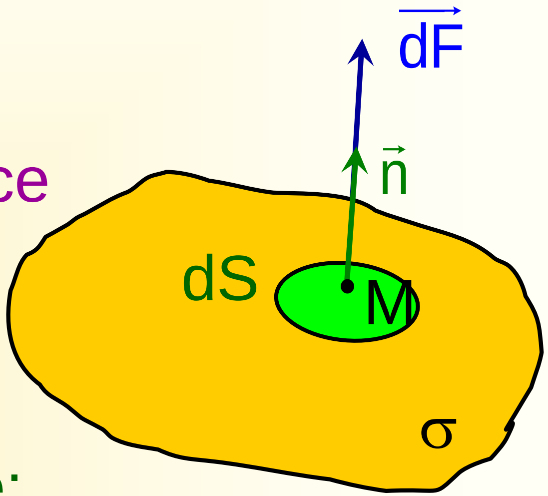
➔ A la surface d'un conducteur en équilibre au potentiel V, le champ électrostatique sera très intense au voisinage d'une pointe.

$\Rightarrow$ ionisation de l'air $\Rightarrow$ décharge (paratonnerre, avion,…)

$\Rightarrow$ <u>impossiblité</u> de conserver la charge pour un conducteur chargé muni de pointes.

c- Pression électrostatique

Au voisinage de la surface: $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$



$\rightarrow \vec{E}_1(M)$ champ créé par dS

$\rightarrow \vec{E}_2(M)$ champ créé par le reste de la surface

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\cdot\vec{n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{n}$$

$\Rightarrow$ l'élément de surface dS va subir une force:

$$\overrightarrow{dF} = dq\cdot\vec{E}_2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\cdot dS\cdot\vec{n}$$

➔ Par définition, $p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ est la <u>pression électrostatique</u>

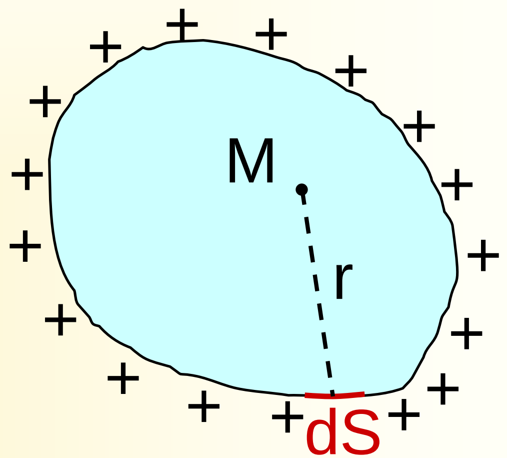
★ $\overrightarrow{dF}$ toujours dirigée suivant $\vec{n}$

★ Si σ très grand, les charges quittent le conducteur

$\Rightarrow$ <u>émission par effet de champ</u>

4- Capacité d'un conducteur en équilibre

En un point M d'un conducteur en équilibre, de surface S et de densité σ, le potentiel s'écrit:



$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma \cdot ds}{r}$$

Sa charge totale est: $Q = \iint_S \sigma \cdot dS$

Si $\sigma \to k\sigma$ alors: $\begin{cases} V'(M) = k \cdot V(M) \\ Q' = k \cdot Q \end{cases} \Rightarrow \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} = C^{te}$

On pose: $\boxed{\frac{Q}{V} = C}$ capacité d'un conducteur isolé en équilibre

- ★ C toujours >0
- ★ Unité: Farad (coulomb.volt^{-1})
- ★ Exemple: $C_{terre} = 4\pi\varepsilon_0 R = 710\ \mu F$

5- Energie d'un système de conducteurs chargés en équilibre

★ La distribution est surfacique et V constante sur la surface.

→ **Cas d'un seul conducteur:**

$$E_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma \cdot V \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \iint_S \sigma \cdot ds = \frac{1}{2} Q \cdot V$$

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

→ **Cas d'un système de n conducteurs:**

Conducteur A_i: charge Q_i et potentiel V_i $\Rightarrow$ $E_e(i) = \frac{1}{2} Q_i V_i$

Pour n conducteurs A_1, A_2, …, A_i, …, A_n:

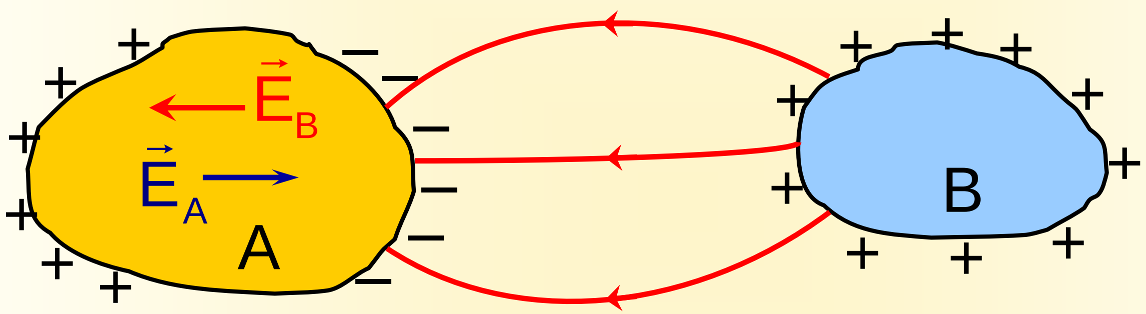
$$\boxed{E_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i}$$

II- INFLUENCE ELECTROSTATIQUE

1- Expérience fondamentale. Définition de l'influence

$\rightarrow$ conducteur A isolé, neutre, en équilibre.

$\rightarrow$ conducteur B isolé, chargé, en équilibre.



conducteur influencé conducteur influençant

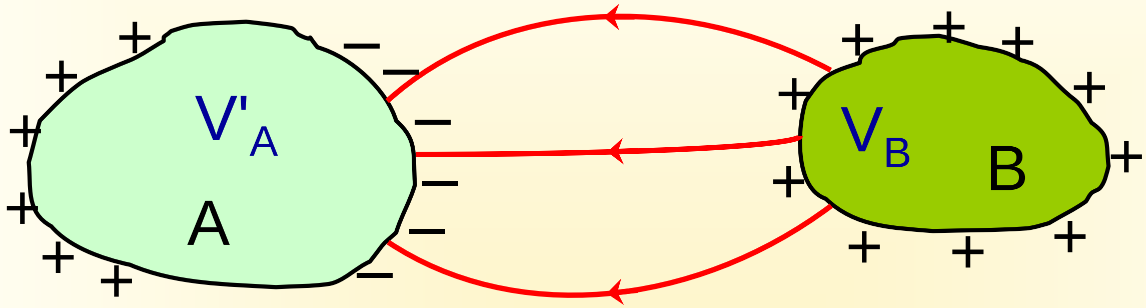
$\rightarrow$ déplacement des charges libres de A sous l'influence de $\vec{E}_B$

$\rightarrow$ à l'équilibre, $\vec{E}_A = -\vec{E}_B$

➔ La répartition des charges superficielles du conducteur A est modifiée $\Rightarrow$ A a été influencé par le champ de B

2- Etats possibles d'un conducteur

a- Conducteur isolé



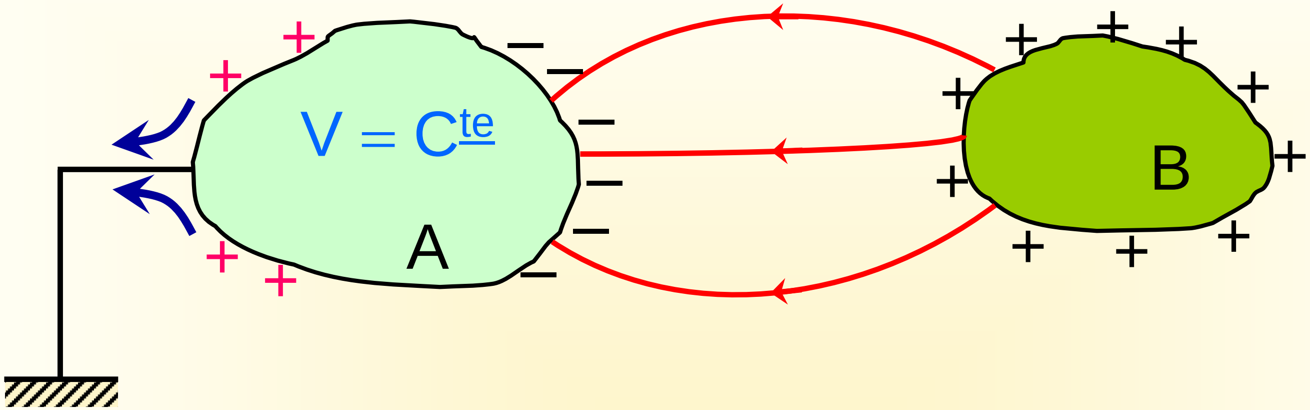
→ Initialement, A est neutre et isolé ⇒ $Q_A = V_A = \sigma_A = 0$

→ Après influence par B chargé, $V'_A \neq 0$ alors que $Q'_A = 0$

➔ Pour un conducteur isolé, l'influence conserve la charge totale mais modifie la répartition des charges sur la surface et donc son potentiel.

→ à charge constante, σ et V peuvent varier.

b- Conducteur à potentiel constant

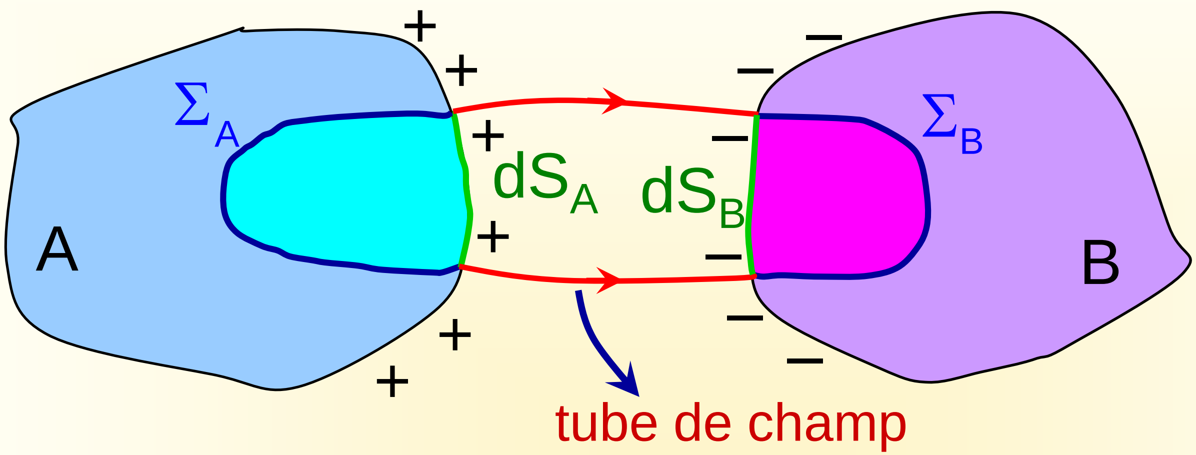


→ Les charges ⊕ de A "s'écoulent" vers la terre.

➔ L'influence modifie la charge totale d'un conducteur maintenu à un potentiel constant.

→ à potentiel constant, σ et Q peuvent varier.

3- Théorème des éléments correspondants



→ dS_A et dS_B sont des éléments correspondants.

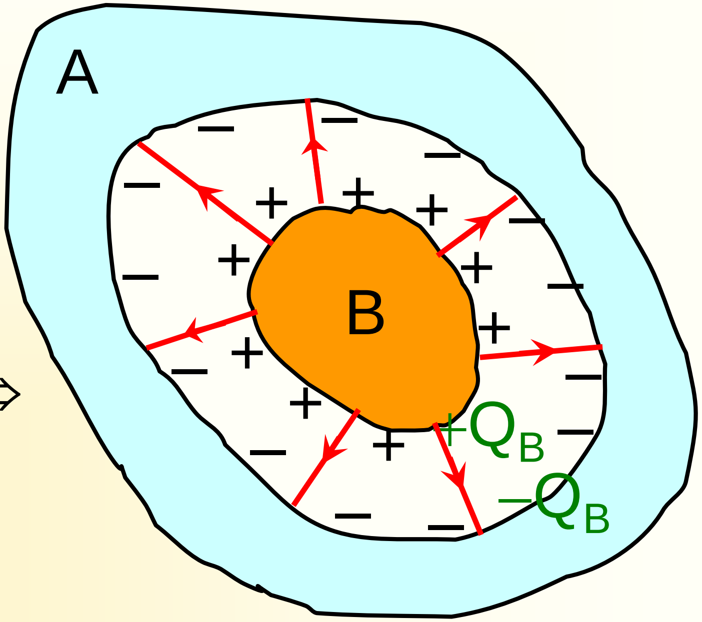
→ Th. de Gauss appliqué à la surface fermée [$\Sigma_A + \Sigma_B +$ tube] :

$$\iint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \Phi_{\vec{E}/\Sigma_A} + \Phi_{\vec{E}/\Sigma_B} + \Phi_{tube} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \iff \underline{dq_A = -dq_B}$$

➔ Théorème: Les charges de deux éléments correspondants sont égales et opposées.

4- Influence totale

→ Il y a influence totale lorsque le conducteur A (influencé) entoure complètement le conducteur B (influençant).



→ Th. des éléments correspondants ⇒ $-Q_B$ sur la surface intérieure de A

→ Face extérieure de A: différents cas:

★ A relié au sol: $V_A = 0 \Rightarrow Q_{ext} = 0$

★ A isolé et initialement neutre: $Q_{ext} = -Q_{int} = +Q_B$

★ A isolé et initialement chargé $+Q_0$: $Q_{ext} = Q_0 + Q_B$

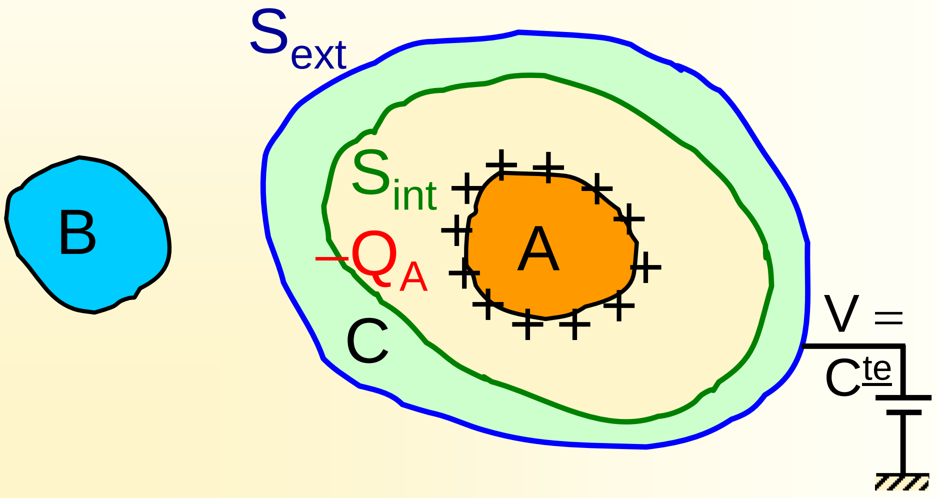
5- Ecrans électriques

a- Conducteur creux maintenu à potentiel constant

★ A chargé Q_A , $Q_B = 0$

$\Rightarrow$ S_{int} charge $-Q_A$

S_{ext} invariante



★ B chargé

V reste constant

$\Rightarrow$ S_{int} invariante

➔ C joue le rôle d'un écran électrique (blindage)

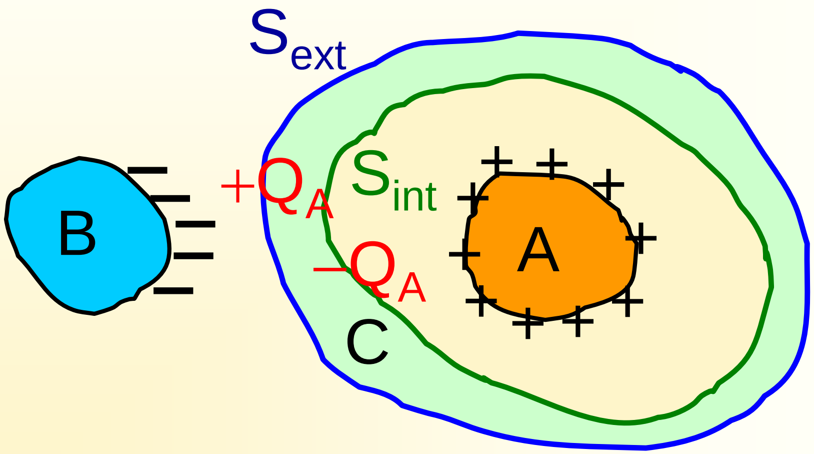
(en pratique, $V = 0$, le blindage est "à la masse")

b- Conducteur creux isolé ($Q_C = C^{te}$)

★ A chargé Q_A , $Q_B = 0$

$\Rightarrow$ S_{ext} : charge $+Q_A$

$\Rightarrow$ C n'est pas un écran



★ B chargé , $Q_A = 0$

$\Rightarrow$ pas d'influence sur S_{int} et A (conducteur creux)

$\Rightarrow$ C est un écran électrique pour l'intérieur du conducteur (cage de Faraday)

➔ Pour réaliser un écran électrique parfait il suffit de maintenir à potentiel constant un conducteur creux.

III- ETATS D'EQUILIBRE D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS: étude théorique.

1- Etat d'équilibre d'un système

Un état d'équilibre d'un système de conducteurs est défini par la connaissance du potentiel ou/et de la charge de chaque conducteur.

2- Unicité de l'état d'équilibre

→ Conducteur isolé : pour un conducteur isolé dans le vide, l'état d'équilibre est défini de façon unique si l'on connaît son potentiel V_0 :

- V(M) est défini de façon unique.
- $\vec{E}(M)$ est défini de façon unique.
- la densité de charge σ est définie en tout point de la surface du conducteur.

→ Système de n conducteurs isolés et chargés : la connaissance des potentiels V_1, V_2, …, V_n définit de manière unique le potentiel V(M) en tout point de l'espace.

- Q_1, Q_2, …,Q_n sont définies de façon unique.
- σ_1, σ_2, …,σ_n sont définies.

3- Principe de superposition des états d'équilibre

Soit un système de conducteurs et 2 états d'équilibre:

→ Etat 1: $\sigma = \sigma_{1i}$ et $V = V_{1i}$ sur le conducteur i

→ Etat 2: $\sigma = \sigma_{2i}$ et $V = V_{2i}$ sur le conducteur i

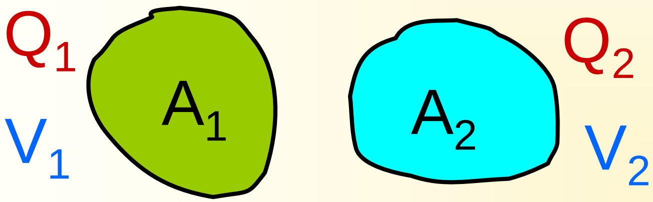
➔ Le principe de superposition des états d'équilibre affirme que l'état défini par :

$\sigma = \sigma_{1i} + \sigma_{2i}$ et $V = V_{1i} + V_{2i}$ sur le conducteur i

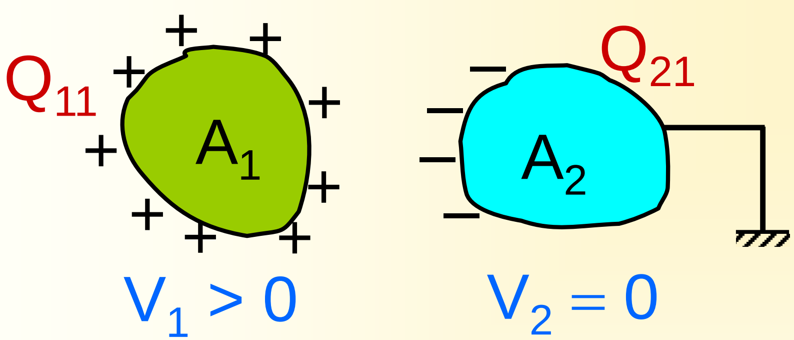
est aussi un état d'équilibre.

3- Capacités et coefficients d'influence d'un système de conducteurs

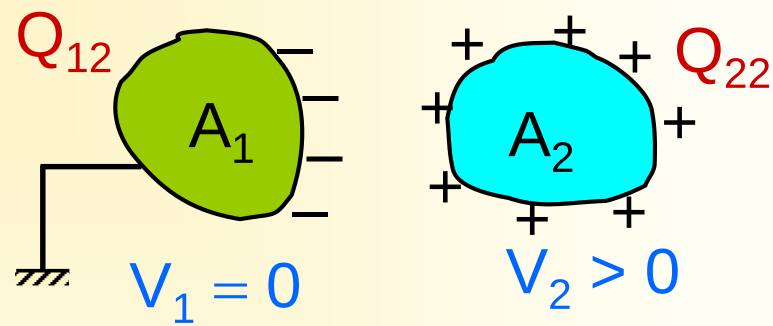
Soit un système de 2 conducteurs en équilibre:



$\equiv$ superposition de 2 états d'équilibre:



Etat 1



Etat 2

Donc: $$\begin{cases} Q_1 = Q_{11} + Q_{12} = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = Q_{21} + Q_{22} = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

➔ Définitions

- C_{11} = capacité du conducteur A_1 en présence de A_2.
- C_{22} = capacité du conducteur A_2 en présence de A_1.
- C_{12} = coefficient d'influence de A_2 sur A_1.
- C_{21} = coefficient d'influence de A_1 sur A_2.
- $Q_{11} = C_{11}V_1$ = charge propre du conducteur A_1.
- $Q_{12} = C_{12}V_2$ = charge qui apparaît sur A_1 influencé par A_2

$\Rightarrow$ Q_{12} de signe opposé à V_2

$\Rightarrow$ C_{12} et C_{21} sont toujours < 0

4- Généralisation

Pour un système de n conducteurs en influence, on a:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ \dots \ + C_{1n}V_n \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \ \dots \ + C_{2n}V_n \\ \vdots \\ Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \ \dots \ + C_{nn}V_n \end{cases}$$

c'est à dire: $$\boxed{Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}V_j}$$ avec: $$\begin{cases} C_{ij} = C_{ji} < 0 \\ C_{ii} > 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ l'indice i correspond au conducteur influencé, et l'indice j au conducteur influençant.

➔ Les charges sont des fonctions linéaires et homogènes des potentiels.

IV- CONDENSATEURS

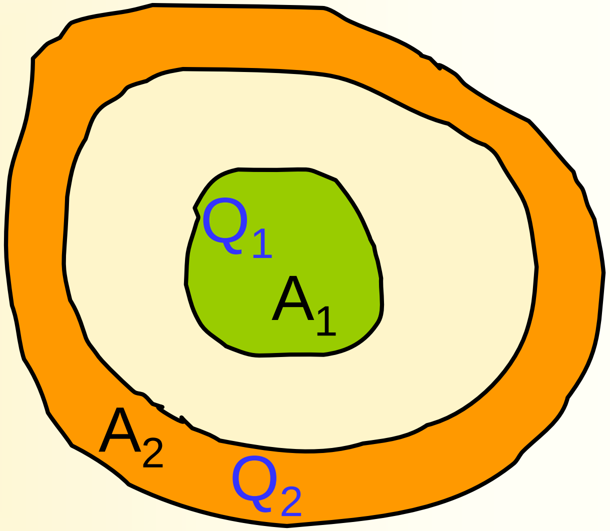
1- Définitions

➔ Un condensateur est un ensemble de 2 conducteurs en influence totale.

$\rightarrow A_1 =$ armature interne de charge Q_1

$\rightarrow A_2 =$ armature externe de charge

$$Q_2 = -Q_1 + Q_{2ext}$$



➔ $Q_1 = Q$ est la charge du condensateur

➔ Relations générales:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ On peut réaliser un état d'équilibre où on a: $\begin{cases} V_1 \neq 0 \\ V_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 \\ Q_2 = C_{21} V_1 \end{cases} \quad \text{or} \quad Q_1 = -Q_2 \quad (Q_{2ext} = 0 \;\; \text{car} \;\; V_2 = 0)$$

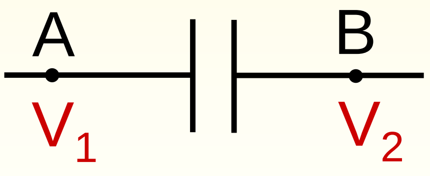
d'où $C_{11} = -C_{21} = -C_{12} = C$ <u>Capacité du condensateur</u>

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = C(V_1 - V_2)}$$

➔ La charge d'un condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel qui existe entre ses armatures.

➔ La capacité C dépend de la géométrie (forme) des armatures.

➔ Schéma d'un condensateur:



2- Calcul de capacités

a- Méthode générale

① → Calcul de $\vec{E}$ entre les armatures (Th. de Gauss).

② → Calcul de la circulation de $\vec{E}$ entre les armatures.

$$V_1 - V_2 = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

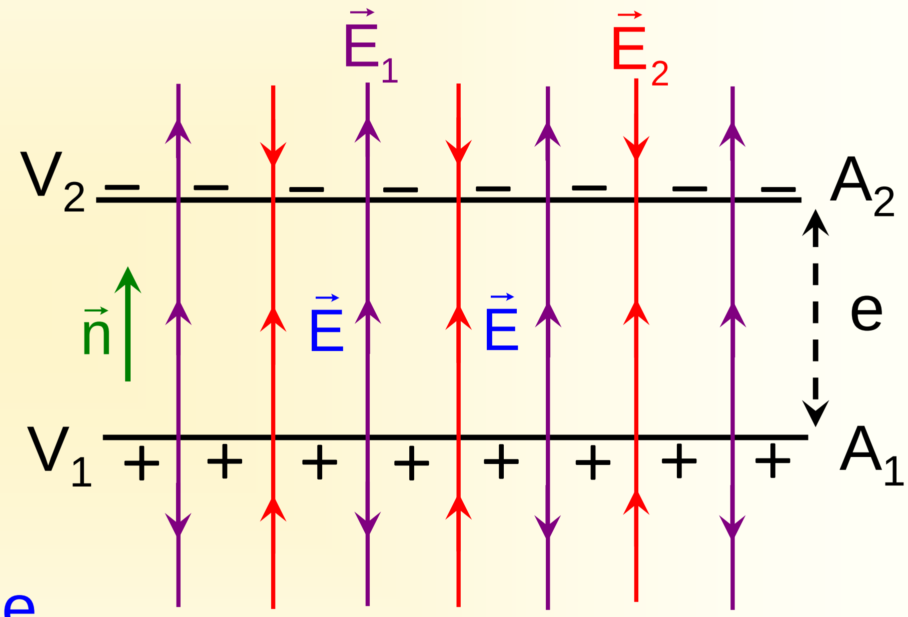
③ → Calcul de C.

$$Q = \iint_S \sigma \cdot dS \qquad \text{et} \qquad C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

b- Condensateur plan

→ Armatures A_1 et A_2 : plans de surface S séparés d'une distance e (S >> e) et portés aux potentiels V_1 et V_2.

→ Densités de charges uniformes: $+\sigma$ sur A_1 et $-\sigma$ sur A_2.



① $$\left.\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}\\ \vec{E}_2 &= \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

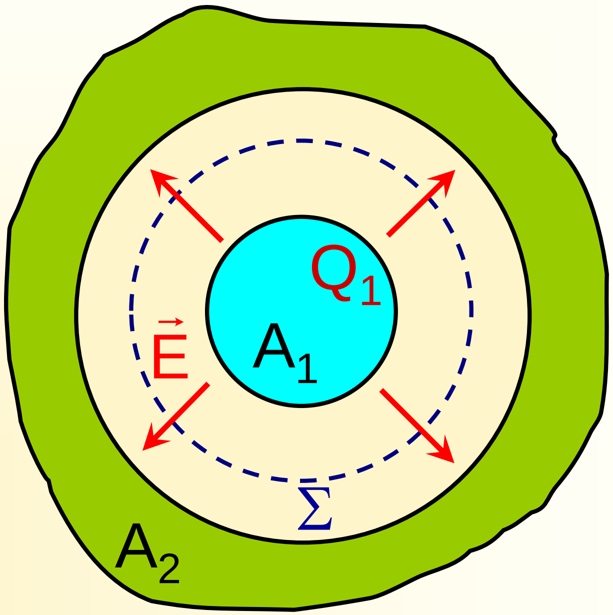
② $$V_1 - V_2 = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = E\cdot e = \frac{\sigma\cdot e}{\varepsilon_0}$$

③ $$Q = \sigma\cdot S \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

c- Condensateur sphérique

→ Armature A_1 : sphère de rayon R_1.

→ Armature A_2 : sphère de rayon R_2.



① Σ surface de Gauss de rayon r $\Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\,\vec{u}_r$$

② Circulation de $\vec{E}$ entre A_1 et A_2:

$$\int_{A_1}^{A_2}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dr} = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

③ $$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

3- Propriétés des condensateurs

a- Accumulation d'électricité

Un condensateur est un "réservoir" d'électricité.

$\rightarrow$ Conducteur A_1 sphérique isolé au potentiel V: $Q = 4\pi\varepsilon_0 RV$

$\rightarrow$ Si on entoure A_1 par un autre conducteur sphérique de rayon $R+e$ (avec $R>>e$) au potentiel 0, Q devient:

$$Q' = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{e} V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q'}{Q} = \frac{R}{e} \gg 1$$

➔ Pour une ddp donnée, on peut placer une charge beaucoup plus grande sur un condensateur que sur un conducteur isolé.

➔ Un condensateur sera caractérisé par:

$\rightarrow$ sa capacité.

$\rightarrow$ la ddp $(V_1 – V_2)$ maximum qu'il peut supporter.

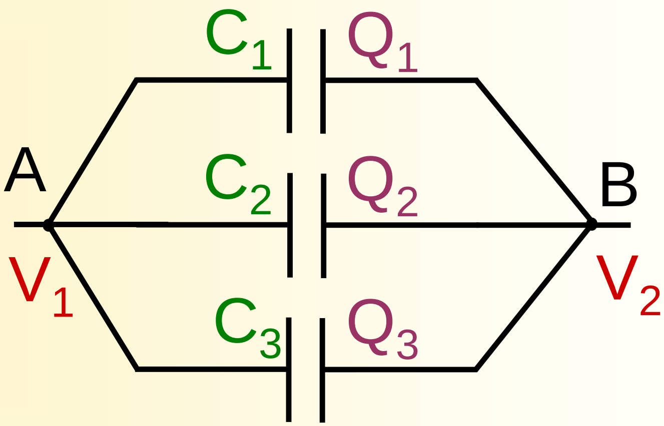
b- Groupement de condensateurs

➔ On groupe le condensateurs pour obtenir un condensateur équivalent:

→ capacité plus grande (groupement parallèle).

→ ddp plus grande (groupement série).

★ Groupement parallèle



→ armatures internes: potentiel V_1.

→ armatures externes: potentiel V_2.

→ charge du groupement:

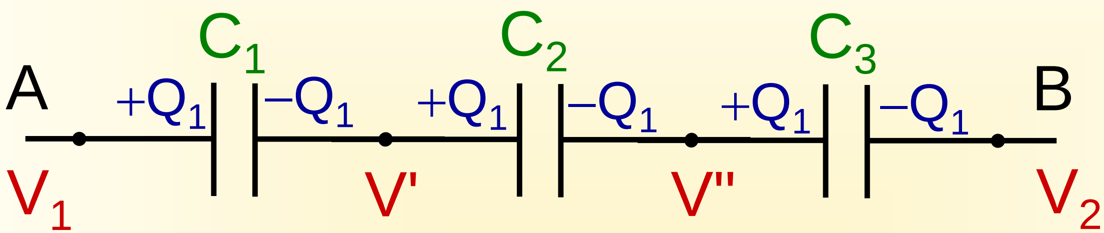
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)(V_1 - V_2) = C(V_1 - V_2)$$

➔ Pour n condensateurs groupés en parallèle, le condensateur équivalent a une capacité:

$$\boxed{C = \sum_{1}^{n} C_i}$$

★ Groupement série

→ l'armature interne d'un condensateur est reliée à l'armature externe du suivant, etc.….



→ tous les condensateurs portent la même charge Q_1.

$$V_1 - V_2 = (V_1 - V') + (V' - V'') + (V'' - V_2)$$

d'où $$V_1 - V_2 = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q_1}{C}$$

➔ Pour n condensateurs groupés en série, le condensateur équivalent a une capacité:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

4- Condensateur avec diélectrique

→ On place un isolant solide (mica, papier paraffiné, verre,….) ou liquide (huile minérale) ou de l'air entre les armatures.

➔ La capacité du condensateur est multipliée par un facteur ε_r.

$$\boxed{C = \varepsilon_r C_0}$$

➔ ε_r est la permittivité de l'isolant.

- air sec: $\varepsilon_r = 1{,}00058 \approx 1$ (vide)
- mica: $\varepsilon_r \approx 8$
- verres: $\varepsilon_r \approx 4$ à 7
- paraffine: $\varepsilon_r \approx 2{,}1$

➔ Potentiel disruptif: si la ddp entre les armatures devient trop grande, le diélectrique devient conducteur et une étincelle se produit entre les armatures: le condensateur "claque".

5- Energie d'un condensateur

$\rightarrow$ Condensateur = système de 2 conducteurs en influence.

$$\Rightarrow \qquad E_e = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2$$

$\rightarrow$ En général, on a $\quad Q_2 = -Q_1$

$$\Rightarrow \qquad E_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

avec $\quad Q = Q_1 \quad$ et $\quad V = V_1 - V_2$

➔ Localisation de l'énergie électrostatique:

$-\Delta E_e = W(\text{forces électrostatiques}) \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{élec}} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \neq \vec{0}$

$\rightarrow$ l'énergie électrostatique est localisée (ou stockée) dans les régions où le champ n'est pas nul.

➔ Dans un condensateur, l'énergie est localisée entre les armatures.

➔ **Densité d'énergie électrostatique d'un condensateur:**

→ Exemple: condensateur plan

$$\begin{cases} C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{e} \\ V_1 - V_2 = V = E \cdot e \end{cases} \Rightarrow \quad E_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \mathcal{V}$$

avec $\mathcal{V} = S.e =$ volume du condensateur où est localisée E_e.

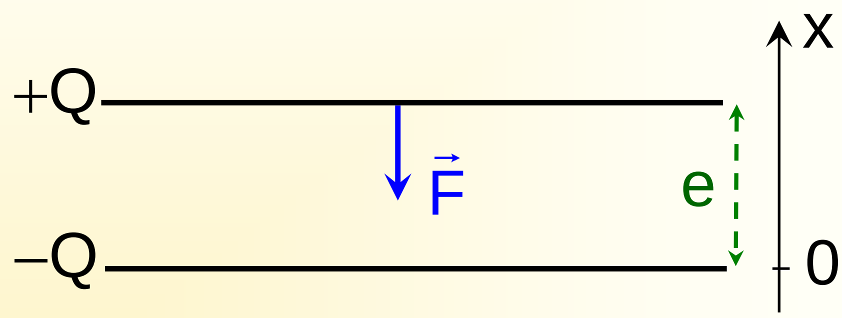
→ Plus généralement, on définit la densité d'énergie électrostatique par:

$$\boxed{\frac{dE_e}{d\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2}$$

➔ Forces agissant sur les armatures d'un condensateur:

→ A l'aide de la pression électrostatique:

$$\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S \, \vec{n}$$ (attractive)



$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \qquad Q = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \cdot V$$

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

d'où $$\boxed{\left|\vec{F}\right| = \frac{\varepsilon_0 S}{2e^2} V^2 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}$$

→ A l'aide de la variation d'énergie à charge constante:

Déplacement dx de l'armature $\Rightarrow$ $dW_{op} = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$

Système isolé donc $dW_{op} = dE_e$

alors: $$\boxed{\left|\vec{F}\right| = -\left[\frac{dE_e}{dx}\right]_{Q=C^{te}}}$$

→ A l'aide de la variation d'énergie à potentiel constant:

- Au cours du déplacement, la charge Q varie donc la source fournit une énergie $dW_s = VdQ$
- la variation d'énergie électrostatique est alors:

$$dE_e = dW_{op} + dW_s = -\left|\vec{F}\right| \cdot dx + V \cdot dQ$$

or, pour un condensateur: $dE_e = d\left(\frac{1}{2}QV\right)_{V=C^{te}} = \frac{1}{2}V \cdot dQ$

d'où $\left|\vec{F}\right| \cdot dx = \frac{1}{2}V \cdot dQ = dE_e$

et $$\boxed{\left|\vec{F}\right| = \left[\frac{dE_e}{dx}\right]_{V=C^{te}}}$$