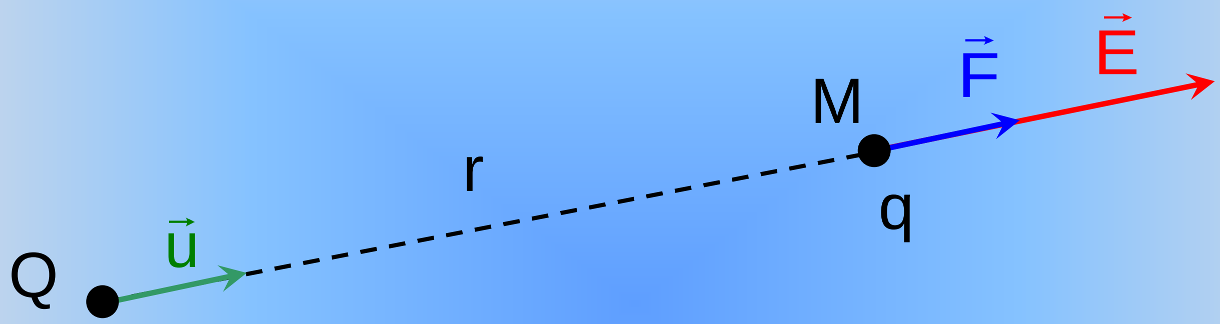
CHAPITRE 2

CHAMP ELECTROSTATIQUE

I- DEFINITION

1- Champ électrostatique

→ $q > 0$ soumise à une force de nature électrostatique due à une charge $Q > 0$.



$$\vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\,\vec{u} = q\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{F}(M) = q\,\vec{E}(M)}$$

- q charge passive
- Q charge active (source)

→ La charge (active) Q modifie l'espace environnant

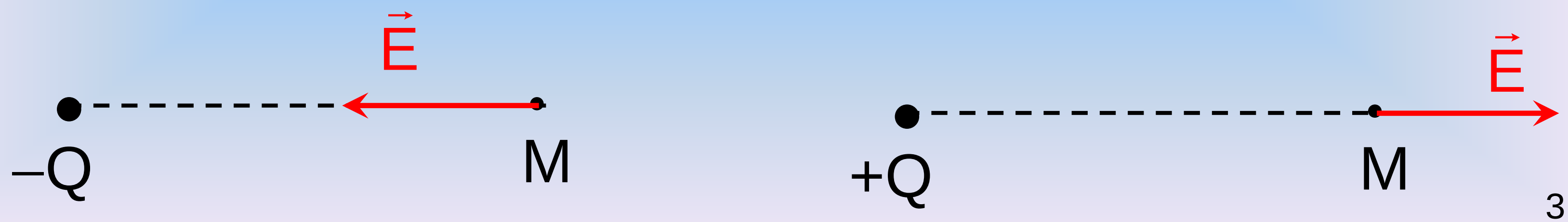
⇒ existence d'un champ électrostatique :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}(M)}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

➔ Une charge électrique q placée en un point M de l'espace où existe un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ subit une force électrostatique $\vec{F}(M) = q\,\vec{E}(M)$

2- Propriétés

→ $\vec{E}$ vecteur d'origine M, de même direction que $\vec{F}$, son sens dépend du signe de la charge active Q



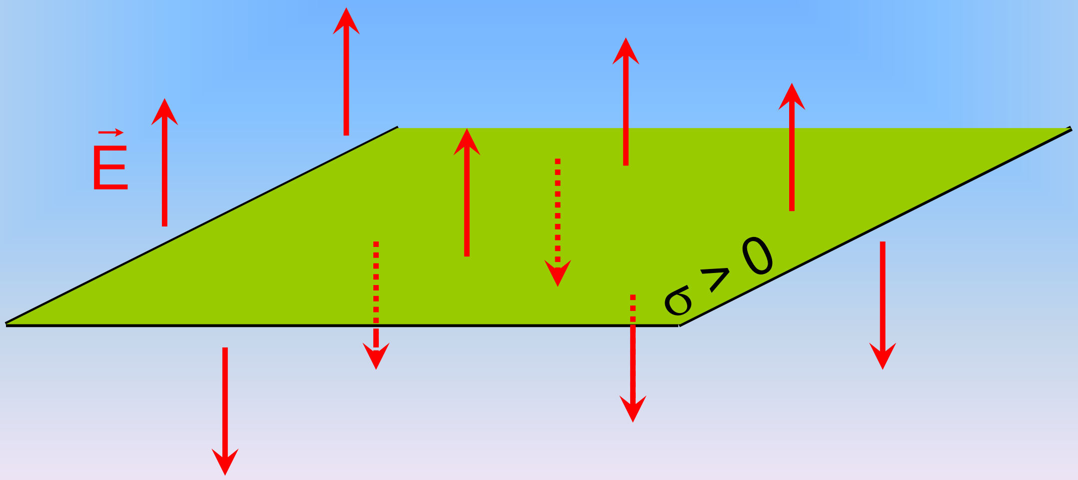
★ Unité: $V.m^{-1}$ (volt / mètre)

★ Le champ électrostatique est la cause physique des forces électrostatiques.

★ Champ uniforme: champ qui possède les mêmes caractéristiques en tout point de l'espace.

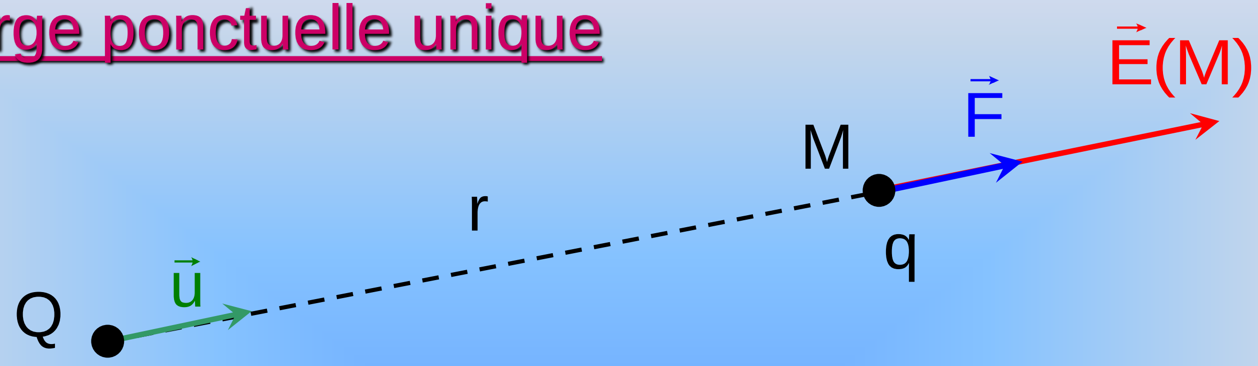
$\vec{F}(M) = q\,\vec{E}(M)$ est alors indépendante de la position de q.

→ exemple: plan infini chargé: $\left|\vec{E}\right| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



II- CHAMP CREE PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES

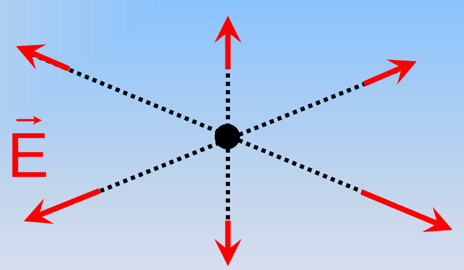
1- Charge ponctuelle unique



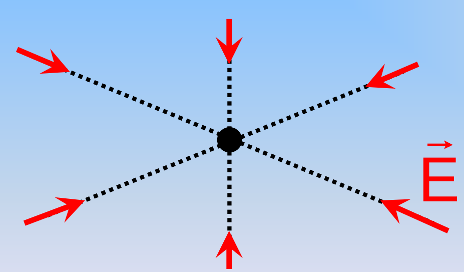
$\rightarrow$ La charge Q crée en M un champ $\vec{E}(M)$ tel que:

$$\vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\,\vec{u} = q\,\vec{E}(M) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}}$$

➔ $\vec{E}(M)$ est un champ radial:



$Q > 0$



$Q < 0$

- Champ créé par plusieurs charges ponctuelles:

→ application du principe de superposition:

$$\vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\,\vec{u}_i \qquad \text{et} \qquad \vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M)$$

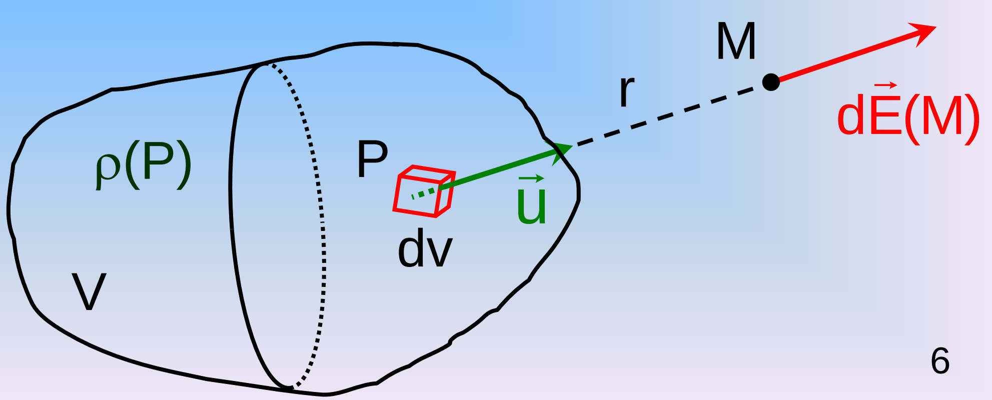
2- Champ créé par une distribution continue

- Distribution volumique de charges de densité $\rho(P)$

→ Le volume élémentaire dv porte une charge $dq = \rho(P)\,dv$

→ en M, le champ élémentaire créé par dq est alors:

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\,\vec{u}$$



$\rightarrow$ champ total $\vec{E}(M)$ dû à toutes les charges du volume V :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P).dv}{r^2} \vec{u}}$$

- Distribution surfacique de charges de densité $\sigma(P)$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P).ds}{r^2} \vec{u}$$

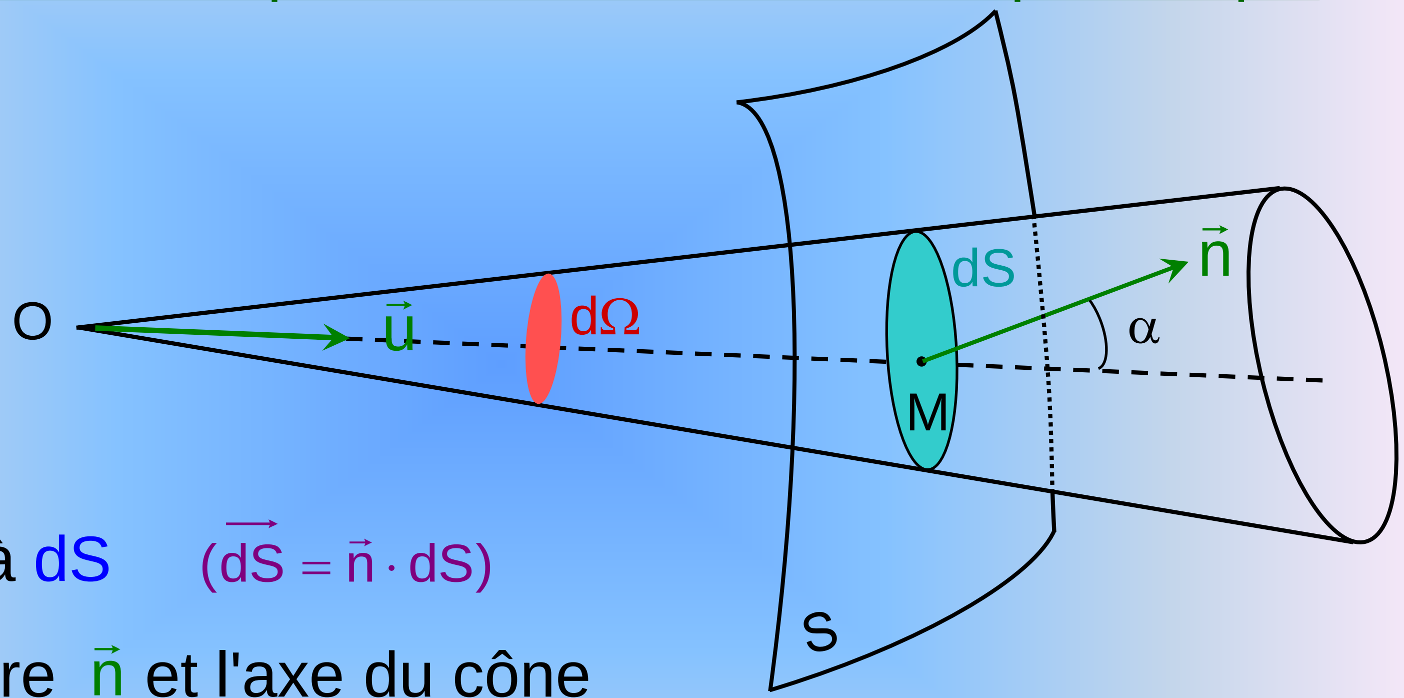
- Distribution linéique de charges de densité $\lambda(P)$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{\lambda(P).dl}{r^2} \vec{u}$$

II- THEOREME DE GAUSS

1- Rappel: angle solide

- angle solide sous lequel on "voit" une surface quelconque

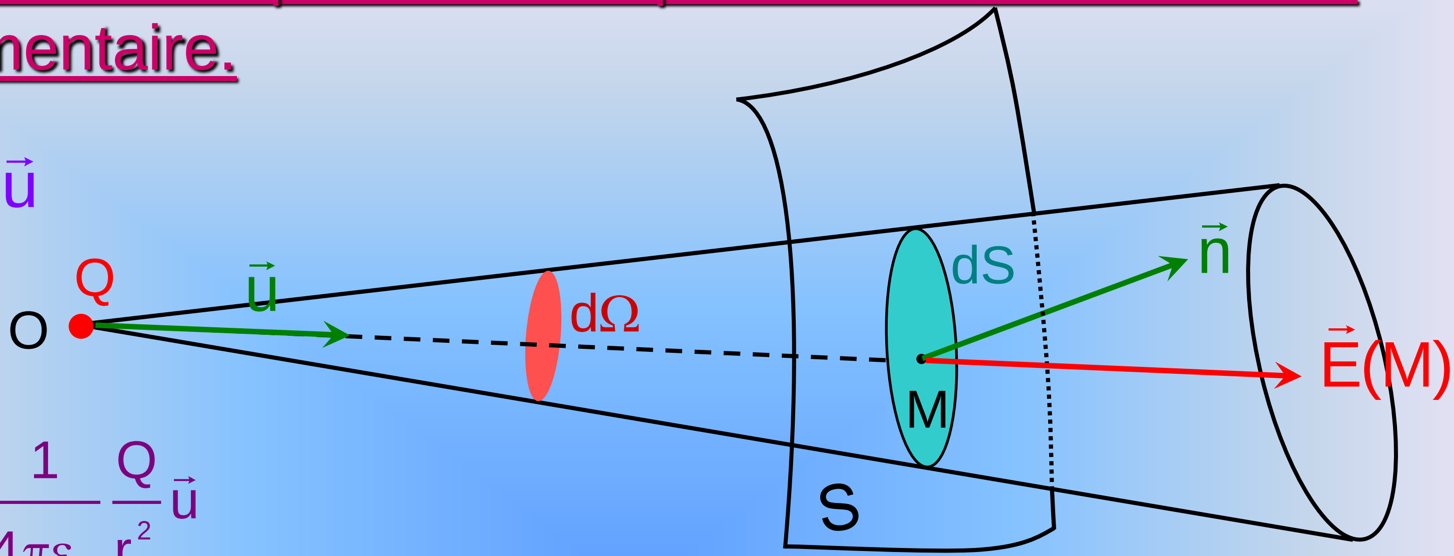


- $OM = r$
- $\vec{n}$ normale à dS $(\overrightarrow{dS} = \vec{n} \cdot dS)$
- α angle entre $\vec{n}$ et l'axe du cône

alors:

$$\boxed{d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{dS}}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos\alpha}{r^2}}$$

2- Flux du champ électrostatique à travers une surface élémentaire.



- $\overrightarrow{OM} = r\ \vec{u}$

- $\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}$

- Flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers dS: $\quad d\Phi_{\vec{E}/dS} = \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}$

$$\Rightarrow \quad d\Phi_{\vec{E}/dS} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad \text{avec} \qquad d\Omega = \frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{dS}}{r^2}$$

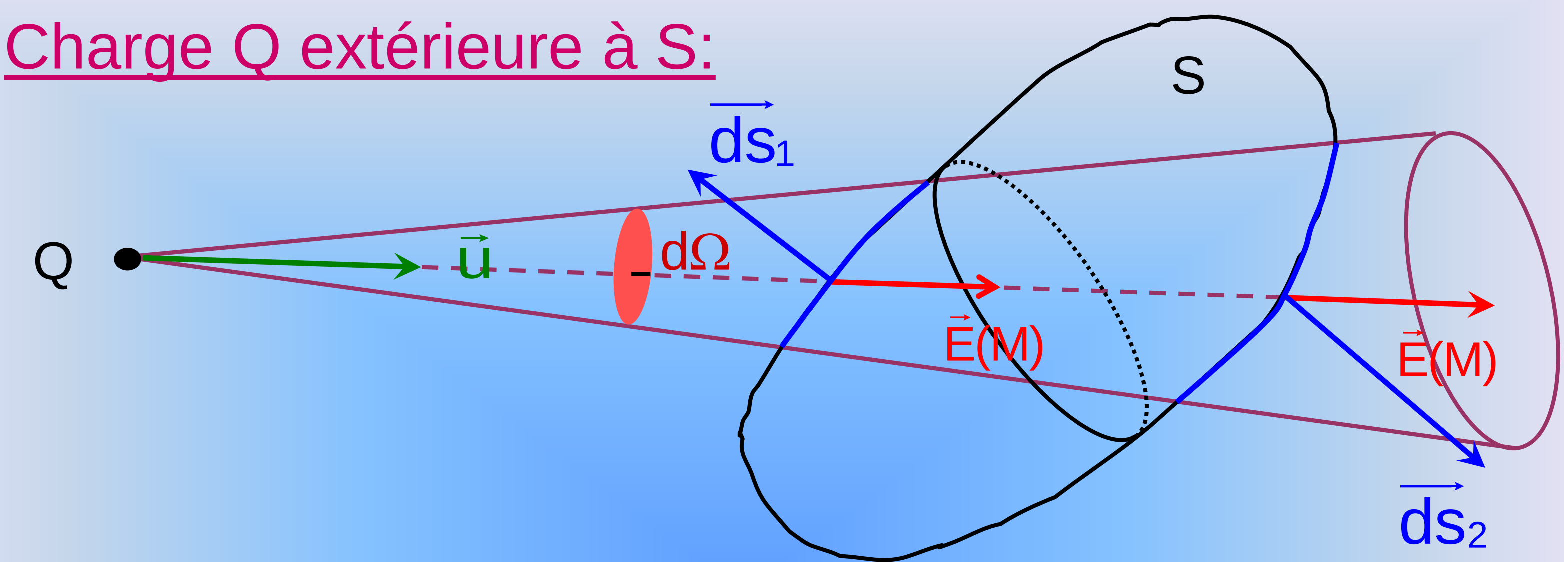
➔ **Surface finie non fermée S:**

$$\boxed{\Phi_{\vec{E}/S} = \iint_S d\Phi_{\vec{E}/dS} = \iint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\Omega}$$

Ω est l'angle solide sous lequel on voit la surface S à partir de O.

➔ Surface fermée S:

→ Charge Q extérieure à S:



- Le cône élémentaire d'angle solide $d\Omega$ découpe dS_1 et dS_2 sur S.

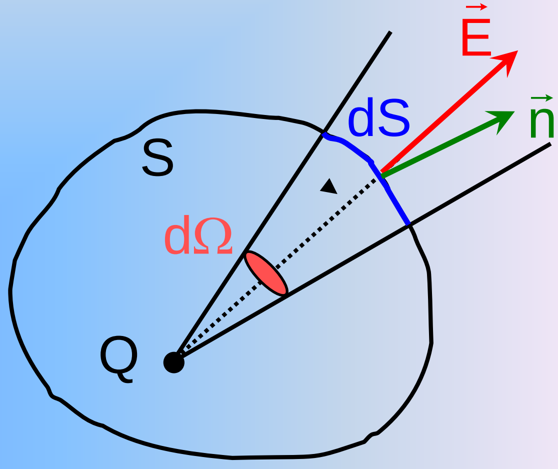
$$\left.\begin{aligned} d\Phi_1 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{dS_1}}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \\ d\Phi_2 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{dS_2}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi_{\vec{E}/S} = 0}$$

➔ Conclusion: Le flux total, à travers une surface fermée S, du champ créé par une charge ponctuelle extérieure à S, est nul.

→ Charge Q intérieure à S:

- Flux de $\vec{E}$ à travers dS:

$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\vec{E}/S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S d\Omega$$



or $\iint_S d\Omega = 4\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{\vec{E}/S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$

→ Ce résultat est indépendant de la position de Q à l'intérieur de S.

3- Théorème de GAUSS

→ On considère un ensemble de charges et une surface fermée quelconque S.

★ charges extérieures à S: $\Phi_{\vec{E}/S} = \Phi_1 = 0$

★ charges intérieures à S: $\Phi_{\vec{E}/S} = \Phi_2 = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

⇒ pour l'ensemble des charges, le flux total à travers S sera alors:

$$\boxed{\Phi_{\vec{E}/S} = \iint_s \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

théorème de Gauss

➔ Théorème:

Le flux du champ électrostatique, créé par une distribution quelconque de charges, à travers une surface fermée S, est égal à la charge intérieure à cette surface divisée par ε_0.

★ S est appelée surface de Gauss. Elle est purement géométrique et choisie arbitrairement en fonction des symétries du système de charges étudié. S ne doit pas comporter de charges.

★ $\sum Q_{int}$ est la somme de TOUTES les charges contenues à l'intérieur de S.

★ $\vec{E}$ est le champ électrostatique TOTAL dû à TOUTES les charges présentes (intérieures et extérieures à S).

4- Expression locale du théorème de Gauss

$\rightarrow$ Soit un volume V chargé avec une densité de charges $\rho(M)$ et S la surface fermée délimitant V.

- Théorème de Gauss:

$$\Phi_{\vec{E}/S} = \iint_S \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint_V \rho(M) \cdot dv}{\varepsilon_0}$$

- Théorème de Green:

$$\iint_S \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{E}(M) \cdot dv$$

On en déduit: $$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$$ Equation de POISSON

★ Cas particulier:

Si $\rho(M) = 0$ (pas de charges en M) mais existence d'un champ électrostatique en M, alors:

$$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{E}(M) = 0}$$

Equation de LAPLACE

alors:

$$\boxed{\Phi_{\vec{E}/S} = 0}$$

➔ Dans une région de l'espace où il n'y a pas de charges, le flux du champ $\vec{E}$ est conservatif.

⇔ le flux est le même à travers toutes les sections d'un tube de champ

III- SYMETRIE DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

➔ **Principe de Curie:**

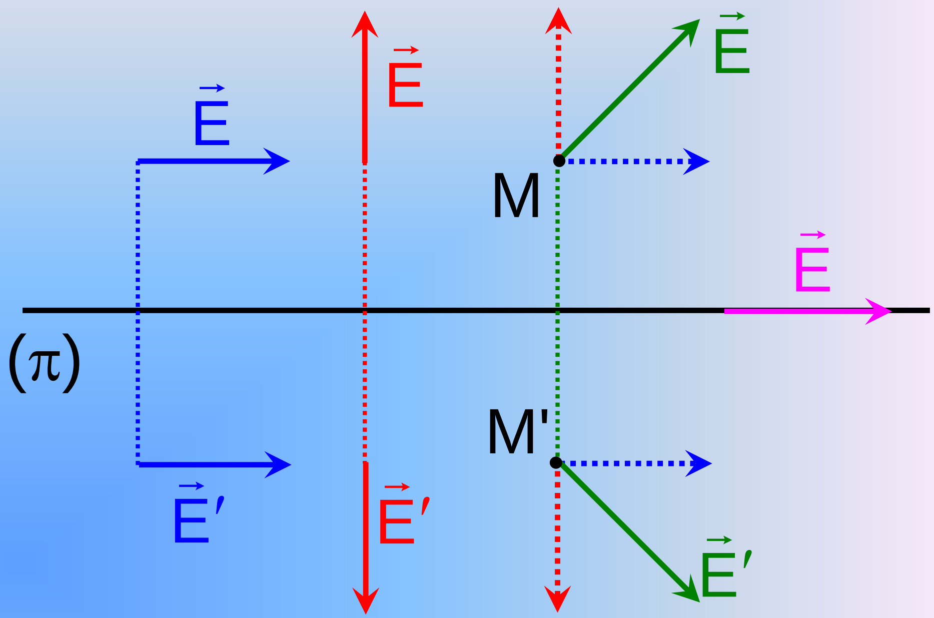
" Les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits"

$\Leftrightarrow$ Si un système physique possède des **symétries**, toute grandeur physique produite par ce système aura au minimum toutes ces symétries.

1- Plan de symétrie

→ (π) plan de symétrie d'une distribution de charges.

→ $\vec{E}'$ symétrique de $\vec{E}$ par rapport à (π).



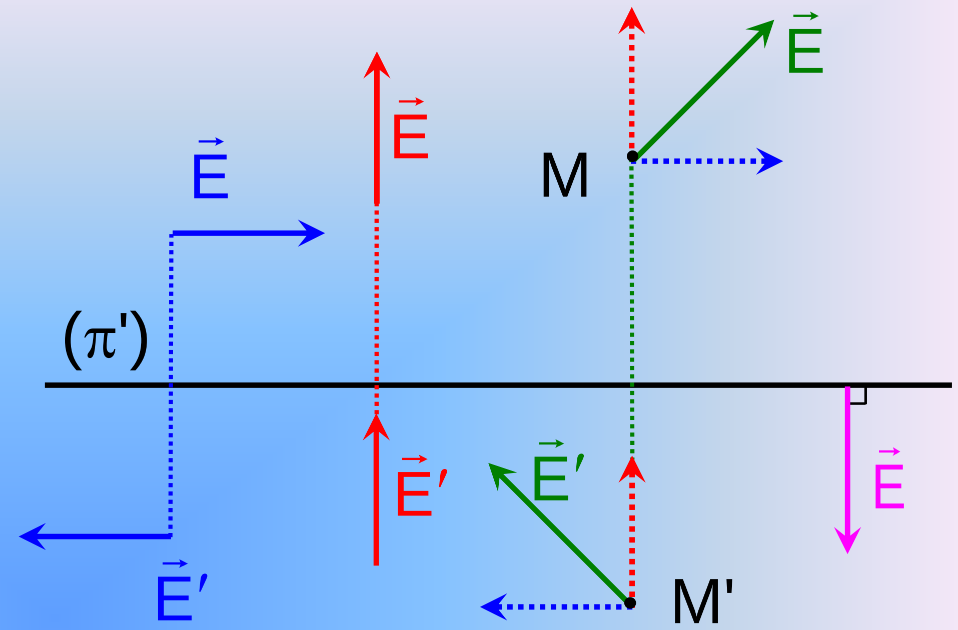
→ Lorsqu'une distribution de charges est symétrique par rapport à un plan, le potentiel et le champ électrostatique qu'elle crée sont symétriques par rapport à ce plan.

→ Le champ électrostatique créé sur un plan de symétrie des charges est contenu dans ce plan.

2- Plan d'antisymétrie

→ le plan d'antisymétrie des charges (π') transforme ρ en ($-\rho$).

→ $\vec{E}'(M') = -\text{sym}\,\vec{E}(M)$



➔ Lorsqu'une distribution de charges est antisymétrique par rapport à un plan, le potentiel et le champ électrostatique qu'elle crée sont antisymétriques par rapport à ce plan.

➔ Le champ électrostatique créé sur un plan d'antisymétrie des charges est orthogonal à ce plan.

➔ Le potentiel électrostatique est nul en tout point du plan d'antisymétrie des charges.

3- Règles de symétrie

➔ Invariance par translation / axe (Ox, Oy, ou Oz)

$\rightarrow$ effets indépendants de x, y ou z.

➔ Invariance par rotation / Oz (symétrie axiale)

$\rightarrow$ effets indépendants de θ: $\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho, z)$

➔ Invariance par translation / Oz et par rotation / Oz

(symétrie cylindrique).

$\rightarrow$ effets indépendants de θ et de z: $\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho)$

➔ Invariance par toute rotation autour du point O

(symétrie sphérique).

$\rightarrow$ effets indépendants de θ et de φ: $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$

➔ Axe de symétrie:

$=$ intersection de 2 ou plusieurs plans de symétrie

$\Rightarrow \vec{E} \in$ à tous ces plans

- Le champ électrostatique créé sur l'axe de symétrie d'une distribution de charges est porté par cet axe.

➔ Centre de symétrie:

$=$ intersection de 2 ou plusieurs axes de symétrie

$\Rightarrow \vec{E} \in$ à tous ces axes $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ en ce point

- Le champ électrostatique créé au centre de symétrie d'une distribution de charges est nul.
- $\vec{E}$ est radial.

Exercice d'application

Un anneau filiforme de centre *O* et de rayon *R* porte une charge *Q* uniformément répartie sur sa circonférence.

1) En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de charge, donner la direction et le sens du champ $\vec{E}(M)$ créé en un point *M* de l'axe de révolution de l'anneau situé à une distance z du centre *O*.

2) Déterminer en fonction de z le module de $\vec{E}(M)$, noté *E(z)*.

3) Tracer la courbe de variation de *E*(*z*).

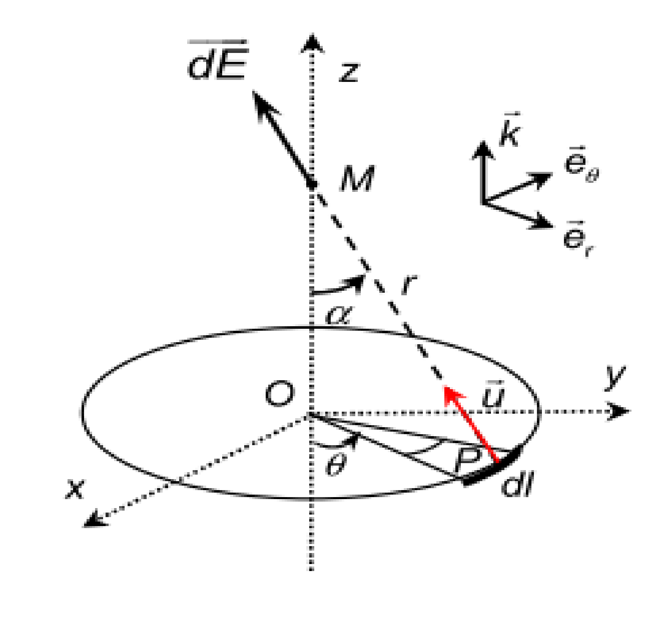
1) **Symétrie** : Tous les plans passant par l'axe z'Oz sont des plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E}(M) \in$ à l'intersection de ces plans (l'axe z'Oz). $\vec{E}(M) = E\vec{k}$.

Invariance du champ par rotation autour de z'Oz. Donc le champ ne dépend pas de θ. De plus $\rho = cte = R \Rightarrow \vec{E}(M) = E(z)\vec{k}$

2) Calcul du module E(z)

Un élément de longueur $dl = Rd\theta$ de charge élémentaire $dq = \lambda dl$ centré en P, crée en M un champ élémentaire :

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$$



Seule la composante suivant $\vec{k}$ intervient dans le champ total $\vec{E}(M)$.

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\cos(\alpha)\vec{k}$$

Le champ total :

$$\vec{E}(M) = \int_{anneau} \overrightarrow{dE}(M) = \int_{anneau} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha\,\vec{k} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha \int_{anneau} dl\vec{k} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k} = E(z)\vec{k}}$$

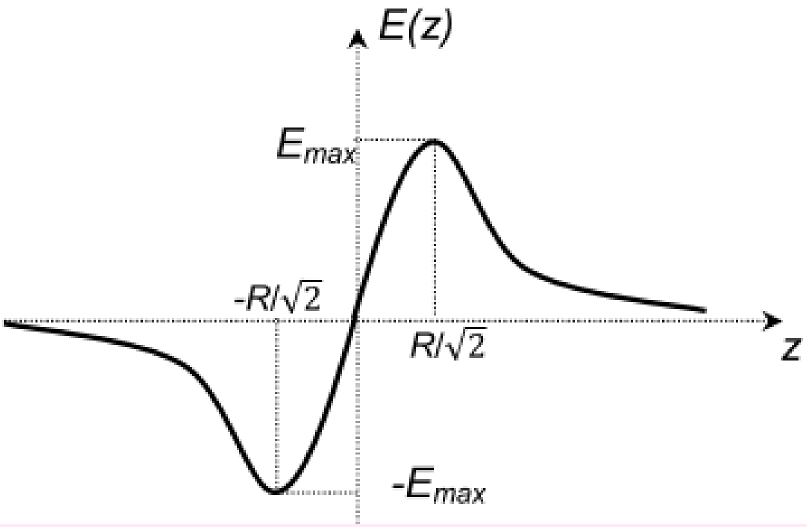
3) Variation de E(z)

$E(-z)=-E(z)$

$z=0\ ;\ E(z)=0$

$z \to \infty\ ;\ E(z) \to 0$

$$\frac{dE(z)}{dz} = 0 \Rightarrow z = R/\sqrt{2}$$



Méthodologie pour calculer les effets Électriques crées par un système chargé

1. Inventaire des éléments de symétrie du système
2. En déduire les surfaces équipotentielles
3. Répondre à la question: EN QUEL POINT M dois-je calculer le champ et potentiel
4. IDENTIFIER la surface équipotentielle qui contient le point M
5. Définir la surface de Gauss FERMEE qui se confond totalement ou partiellement avec l'équipotentielle contenant le point M.

5. Calculer le flux du champ électrostatique à travers la surface de Gauss
6. Appliquer le théorème de Gauss pour déduire le champ électrostatique
7. En déduire le potentiel électrostatique par circulation du champ sans oublier une constante d'intégration
8. Fixer la constante par les conditions aux limites de votre système et par la continuité du potentiel

$\Rightarrow$ Déterminer **la direction** du champ $\vec{E}$ à partir des considérations de **symétries** (radiale pour des géométries cylindriques et sphériques, normale pour des géométrie planes). Les symétries permettent aussi de réduire le nombre de variables d'espace dont dépend la norme de $\vec{E}$.

$\Rightarrow$ Choisir une **surface de Gauss imaginaire** dans la région où l'on souhaite déterminer $\vec{E}$. Il faudra que la surface de Gauss possède les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charges et donc que du champ électrostatique.

$\Rightarrow$ Calculer le **flux du champ électrostatique** à travers la surface de Gauss choisie $\oint\!\!\oint_A \vec{E}.d\vec{A}$. Le calcul de l'intégrale de surface sera très simple si l'on choisie une surface de Gauss ayant les mêmes symétries que $\vec{E}$. La plupart du temps nous allons rencontrer les cas suivants (voir les exemples des paragraphes suivants) :

$$\oint\!\!\oint_A \vec{E}.d\vec{A} = \begin{cases} E \times 4\pi r^2 \text{ (sphere de rayon } r\text{)} \\ E \times 2\pi r L \text{ (flux latéral sur un cylindre de rayon } r \text{ et de longueur } L\text{)} \\ 2E \times A \text{ (flux sur les deux bases d'un cylindre de base } A\text{)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Calculer la **charge intérieure** à la surface de Gauss Q_{int} . Il faudra calculer Q_{int} avec la densité de charge appropriée :

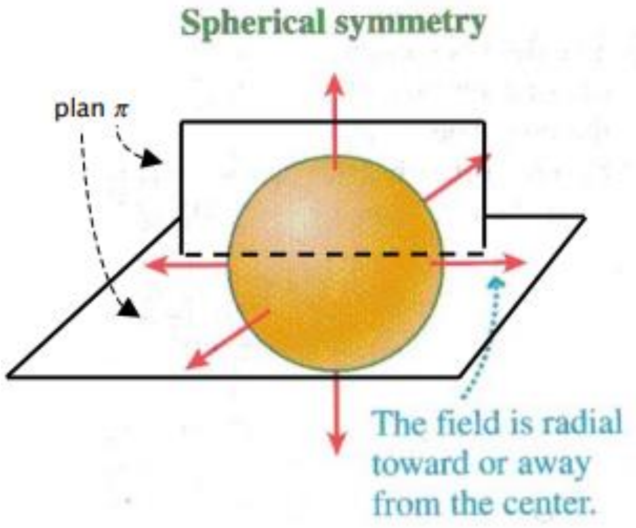
$\Rightarrow$ Appliquer le **théorème de Gauss** $\Phi_E = \oint\!\!\oint_A \vec{E}.d\vec{A} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ et en déduire E.

Exercice d'application: Th de Gauss

1. Sphère uniformément chargée en surface

une sphère de rayon R portant en surface la densité de charges $\sigma = cste$

- un point M quelconque de l'espace.



Direction du champ en M ?

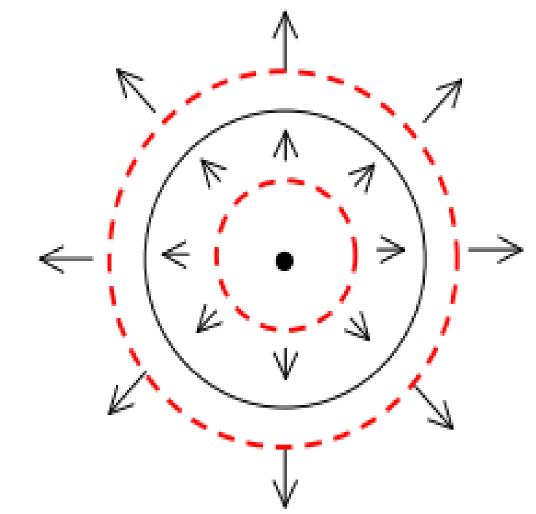
$\longrightarrow$ symétrie du problème

Module E du champ $\vec{E}$?

$\longrightarrow$ Théorème de Gauss

Il faut déterminer la surface de Gauss :

$\longrightarrow$ une sphère de rayon r et de centre O.



2 cas se présentent :

• $\underline{r < R}$:

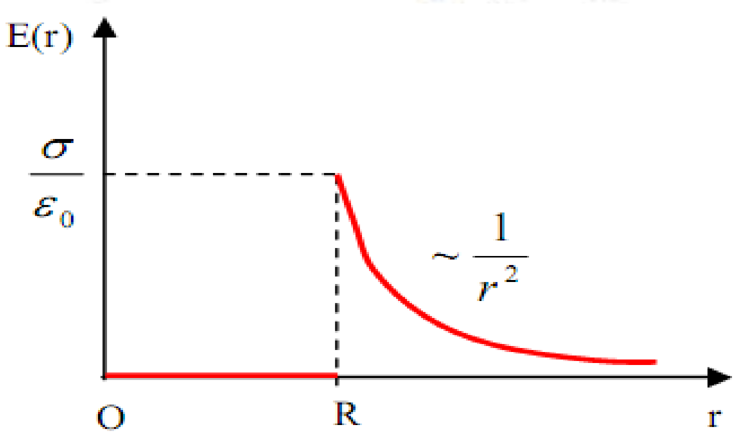
Théorème de Gauss $\rightarrow$ $E.4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$

le champ électrique est nul à l'intérieur de la sphère

• $\underline{r > R}$:

Théorème de Gauss $\rightarrow$ $E.4\pi r^2 = \sigma.\ 4\pi R^2 / \varepsilon_0 \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

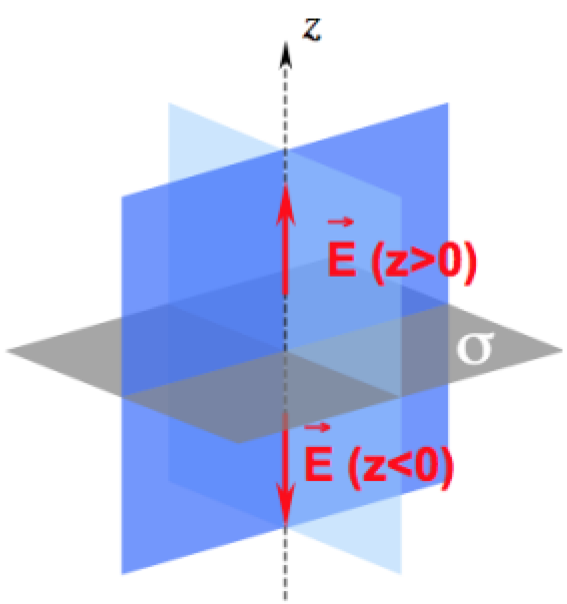
Représentation graphique :



Le problème ne permet pas de définir $\vec{E}$ pour $r = R$

2. Le plan infini uniformément chargé

Analyse des symétries et invariances :



Invariances par translation suivant x et y :

$$\vec{E} = \vec{E}(z)$$

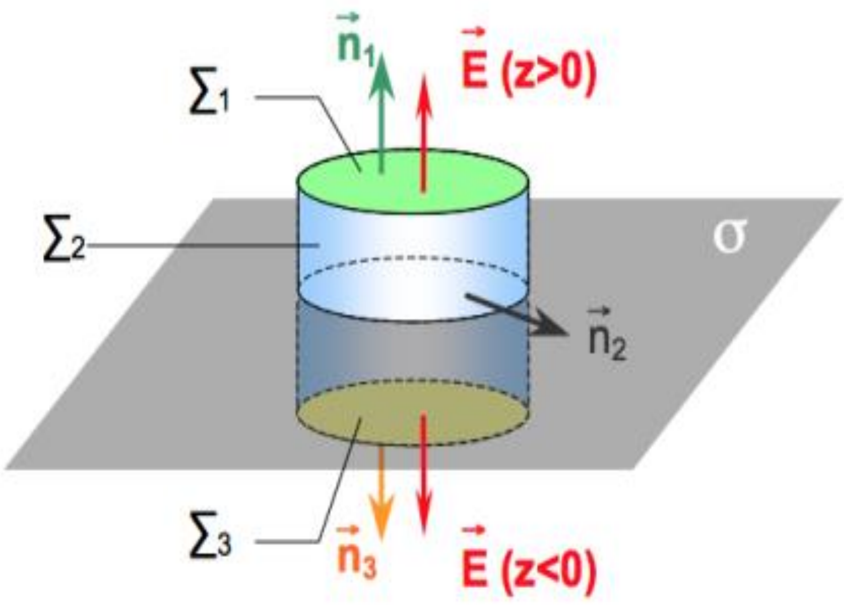
On définit un point M de côte z, au niveau duquel on cherche à calculer le champ électrique.

Plans de symétrie :
Tout plan passant par M et perpendiculaire au plan chargé est plan de symétrie :

$$\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$$

Le plan chargé (z=0) est lui même un plan de symétrie : $E(-z) = -E(z)$

On choisit une surface fermée (surface de Gauss) « pratique » étant données les symétries du problème : ici, un cylindre à cheval sur le plan chargé et symétrique par rapport à ce plan convient bien.



On calcule le flux du champ électrique à travers cette surface, **orientée de l'intérieur vers l'extérieur**

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

<u>Pour z>0, on a :</u>

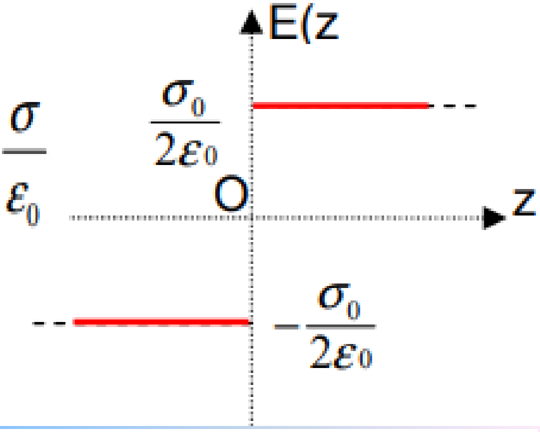
$$\Phi = E(z)\pi R^2 + 0 - E(-z)\pi R^2$$

On calcule la charge Q_{int} totale à l'intérieur de la surface : $Q_{int} = \sigma\pi R^2$

Le théorème de Gauss nous donne : $\vec{E}(z>0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$ et $\vec{E}(z<0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$

$\vec{E}(M)$ est uniforme et est discontinu à la traversé du plan chargé.

Il est non défini sur le plan chargé (z=0). La valeur de la discontinuité vaut $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

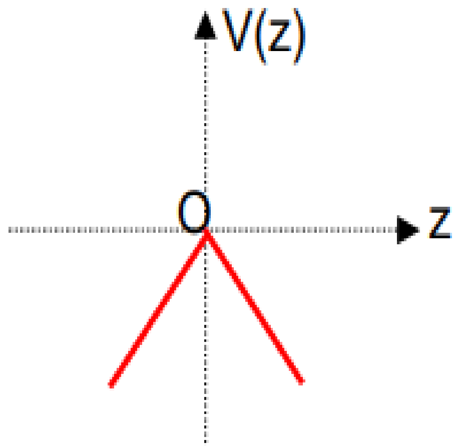


Le potentiel *V(M)* : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$

$$E_z = -\frac{dV}{dz} \quad \text{pour } z > 0 \;\Rightarrow\; V(z) = -\int E_z(z)dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}z + C$$

Le potentiel est nul dans le plan (*xOy*) : $V(0) = 0 \;\Rightarrow V(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} z$

$$\begin{cases} \underline{z > 0} \;\Rightarrow\; E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \;\; ; \;\; V(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \\[2ex] \underline{z < 0} \;\Rightarrow\; E(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \;\; ; \;\; V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \end{cases}$$



Ces deux résultats peuvent être **condensés** sous la forme : $E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{|z|}$ $\;z \neq 0$; $V(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$

3. Sphère uniformément chargée en volume (Symétrie sphérique)

On considère une boule de centre O et de rayon R uniformément chargée en volume, charge volumique ρ, soit une charge totale $Q =$.

→ <u>Étude des symétries et invariances ; surface de Gauss</u> :

Les symétries et invariances sont identiques à celles de la charge ponctuelle, par conséquent :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

et on retient comme surface de Gauss une sphère de rayon r centrée sur l'origine

→ <u>Application du théorème de Gauss</u> :

$$\Phi_\Sigma = E_r(r) \times 4\pi r^2$$

Il reste à déterminer la charge contenue dans la sphère de rayon r ; deux cas se présentent :

⋆ Pour $r > R$, $Q_{int} = Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Tout se passe comme si toute la charge étant concentrée au centre !

⋆ Pour $r < R$, $Q_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$; l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

On constate que le champ est continu en $r = R$. Ceci est toujours vrai dans le cas d'une distribution volumique de charge.

→ Potentiel électrostatique :

⋆ Pour $r > R$: (avec le choix d'un potentiel nul à l'infini)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall\, r > R, \;\; V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

⋆ Pour $r < R$: (avec la continuité du potentiel en $r = R$)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \forall\, r \in [0, R], \;\; V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)$$