Programme d'électricité
Filière SM-PC

Ch.0: Outils mathématiques pour l'électrostatique

1 ère partie: Électrostatique du vide

Ch.1: Charges électriques et forces électrostatiques
Ch.2: Champ et potentiel électrostatiques
Ch.3: Théorème de Gauss
Ch.4: Conducteurs en équilibre électrostatique
Ch.5: Energie électrostatique

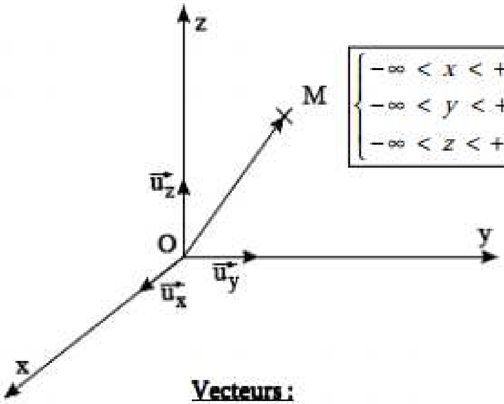
2ème partie : Électrocinétique

Ch.1: Courant électrique et Loi d'Ohm
Ch.2: Générateurs et récepteurs
Ch.3: Réseaux linéaires en régime permanent.

Systèmes de Coordonnées

Coordonnées Cartésiennes : (x, y, z)

+ Base Cartésienne : $(\overline{u_x}, \overline{u_y}, \overline{u_z})$



$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

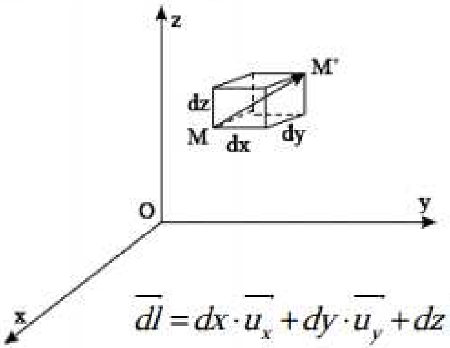
Vecteurs :

$$\vec{r}(M/\Re) = x \cdot \overline{u_x} + y \cdot \overline{u_y} + z \cdot \overline{u_z}$$

$$\vec{v}(M/\Re) = \dot{x} \cdot \overline{u_x} + \dot{y} \cdot \overline{u_y} + \dot{z} \cdot \overline{u_z}$$

$$\vec{a}(M/\Re) = \ddot{x} \cdot \overline{u_x} + \ddot{y} \cdot \overline{u_y} + \ddot{z} \cdot \overline{u_z}$$

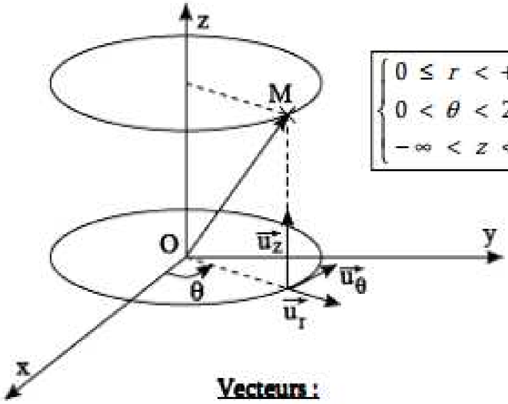
Déplacement Elémentaire : $\overline{dl} = \overline{MM'}$



$$\overline{dl} = dx \cdot \overline{u_x} + dy \cdot \overline{u_y} + dz \cdot \overline{u_z}$$

Coordonnées Cylindriques : (r, θ, z)

+ Base Cylindrique : $(\overline{u_r}, \overline{u_\theta}, \overline{u_z})$



$$\begin{cases} 0 \le r < +\infty \\ 0 < \theta < 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

Vecteurs :

$$\vec{r}(M/\Re) = r \cdot \overline{u_r} + z \cdot \overline{u_z}$$

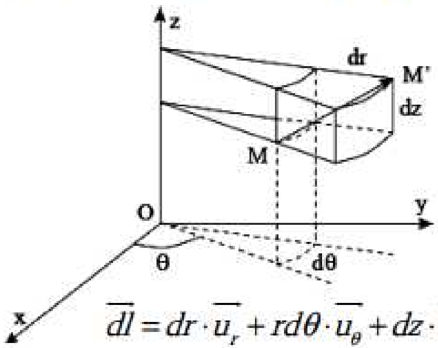
$$\vec{v}(M/\Re) = \dot{r} \cdot \overline{u_r} + r\dot{\theta} \cdot \overline{u_\theta} + \dot{z} \cdot \overline{u_z}$$

$$\vec{a}(M/\Re) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overline{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overline{u_y} + \ddot{z} \cdot \overline{u_z}$$

Relations avec le cartésien :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

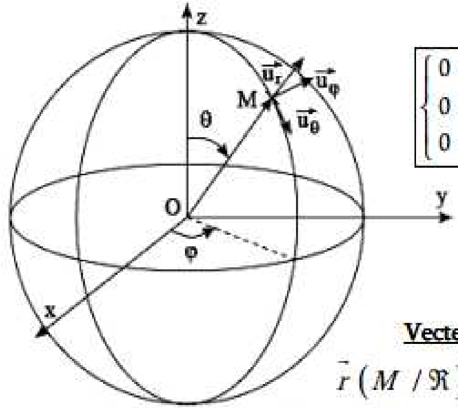
Déplacement Elémentaire : $\overline{dl} = \overline{MM'}$



$$\overline{dl} = dr \cdot \overline{u_r} + rd\theta \cdot \overline{u_\theta} + dz \cdot \overline{u_z}$$

Coordonnées Sphériques : (r, θ, φ)

+ Base Sphérique : $(\overline{u_r}, \overline{u_\theta}, \overline{u_\varphi})$



$$\begin{cases} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Vecteurs :

$$\vec{r}(M/\Re) = r \cdot \overline{u_r}$$

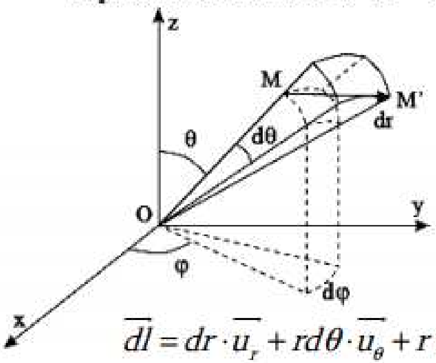
$$\vec{v}(M/\Re) = \dot{r} \cdot \overline{u_r} + r\dot{\theta} \cdot \overline{u_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\varphi \cdot \overline{u_\varphi}$$

$$\vec{a}(M/\Re) = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix}_{(\overline{u_r}, \overline{u_\theta}, \overline{u_\varphi})}$$

Relations avec le cartésien :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Déplacement Elémentaire : $\overline{dl} = \overline{MM'}$



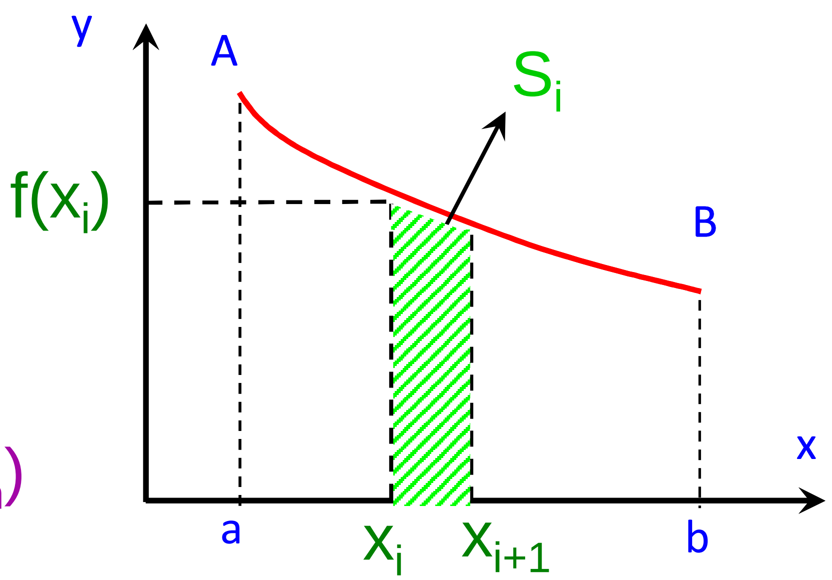
$$\overline{dl} = dr \cdot \overline{u_r} + rd\theta \cdot \overline{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi \cdot \overline{u_\varphi}$$

Intégrales Scalaires

1. Intégrale simple

$\rightarrow$ Soit $y = f(x)$ définie et continue sur $[a,b]$

On veut calculer l'aire aABb



$[a,b]$ divisé en n intervalles Δx_i infiniment petits:

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \qquad (a = x_1 \; , \; b = x_n)$

$\rightarrow$ Aire $\quad S_i = f(x_i) \cdot \Delta x_i$

Si $\; n \rightarrow \infty \;$, $\; \Delta x_i \rightarrow 0 \quad$ et $\quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i \quad$ admet une limite:

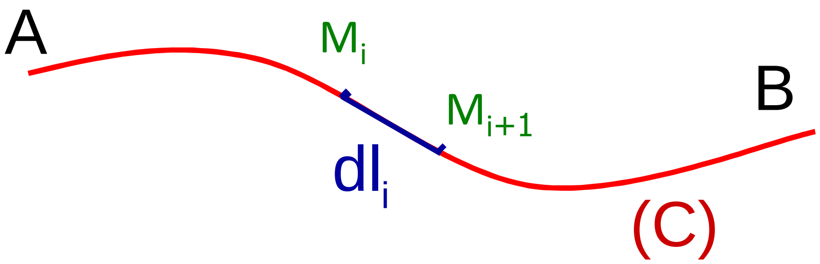
$$S(a,b) = \lim_{n\rightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i \qquad \text{avec} \qquad S(a,b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

➔ $S(a,b)$ est l'intégrale définie de $f(x)$ entre les bornes a et b.

2. Intégrale curviligne (sur une courbe)

Soit f(M) fonction de point à valeur scalaire définie sur (C) :

$$M_i \in (C) \rightarrow f(M_i)$$



$\rightarrow$ Si (C) découpée en n éléments $\Delta l_i = \overline{M_i M_{i+1}}$,

alors la somme $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta l_i$ admet une limite si $n \rightarrow \infty$:

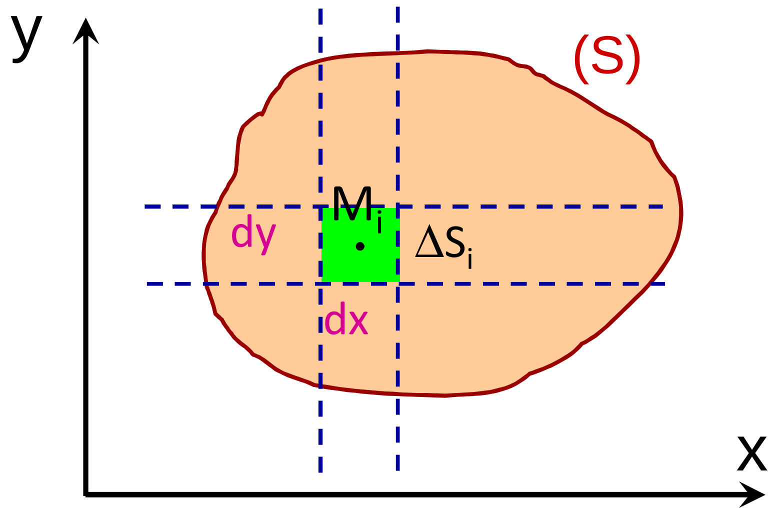
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta l_i = \int_{AB} f(M)\cdot dl$$

c'est l'intégrale curviligne de la fonction f(M) le long de l'arc AB de la courbe (C).

★ $f(M) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{AB} dl =$ longueur de l'arc AB

3. Intégrale double (de surface)

Soit (S) est une surface plane



$$M_i \in (S) \rightarrow f(M_i) = f(x_i, y_i)$$

$\rightarrow$ (S) découpée en n éléments infiniment petits de surface ΔS_i

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot \Delta S_i = \iint_S f(M)\cdot dS$$

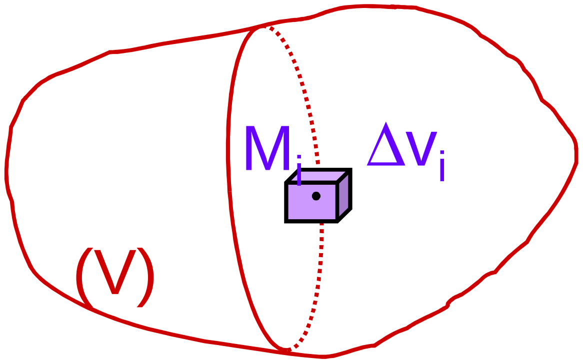
c'est l'intégrale double de la fonction f(M) sur la surface (S).

★ $f(M) = 1 \Rightarrow \iint_S dS =$ surface totale de (S).

★ Surface plane en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta S = dx \cdot dy \Rightarrow \iint_S f(M)\cdot dS = \iint_S f(x,y)\cdot dx\cdot dy$$

4. Intégrale triple (de volume)



→ (V) volume défini dans l'espace

$$M_i \in (V) \rightarrow f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$$

On découpe (V) en n éléments infiniment petits, centrés en M_i, de volume Δv_i.

Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta v_i = \iiint_V f(M) \cdot dv$$

c'est l'intégrale triple de la fonction f(M) sur le volume (V).

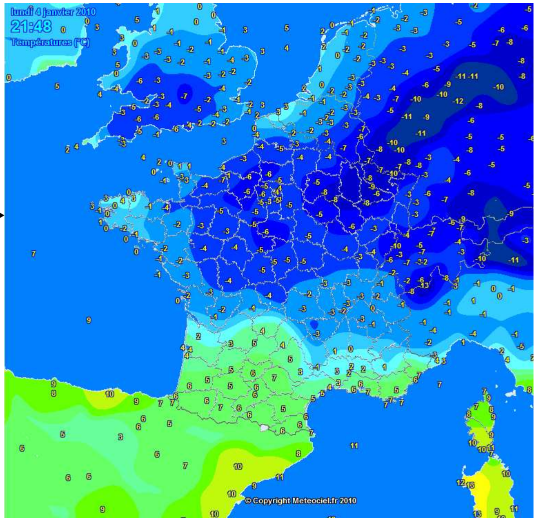
★ $f(M) = 1 \Rightarrow \iiint_V dv =$ volume total de (V).

★ En coordonnées cartésiennes:

$$\Delta v = dx \cdot dy \cdot dz \quad \Rightarrow \quad \iiint_V f(M) \cdot dv = \iiint_V f(x,y,z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

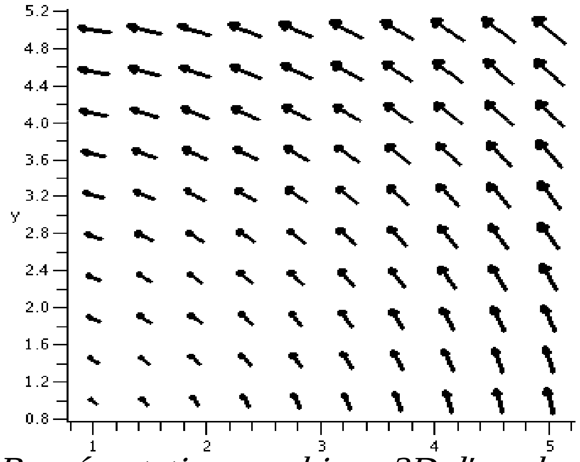
Champ de scalaire et champ de vecteurs

● Un champ **scalaire** est une **fonction** de plusieurs variables reliée à une **propriété** à laquelle on peut associer une valeur **unique** en chaque point de l'espace



Exemples : champ de température , champ de pression

→ Surfaces de niveau: lieu des points M tels que $f(x,y,z) = C^{te}$



Représentation graphique 2D d'un champ vectoriel

● Un champ **vectoriel** est une **fonction** de plusieurs variables reliée à une **propriété** à laquelle on peut associer un **vecteur unique** en chaque point de l'espace.

Exemples : champ des vitesses dans un liquide en mouvement, champs électriques et magnétiques...

● Un champ **uniforme** (scalaire/vecteur):

→ Champ scalaire: $f(M) = cste$

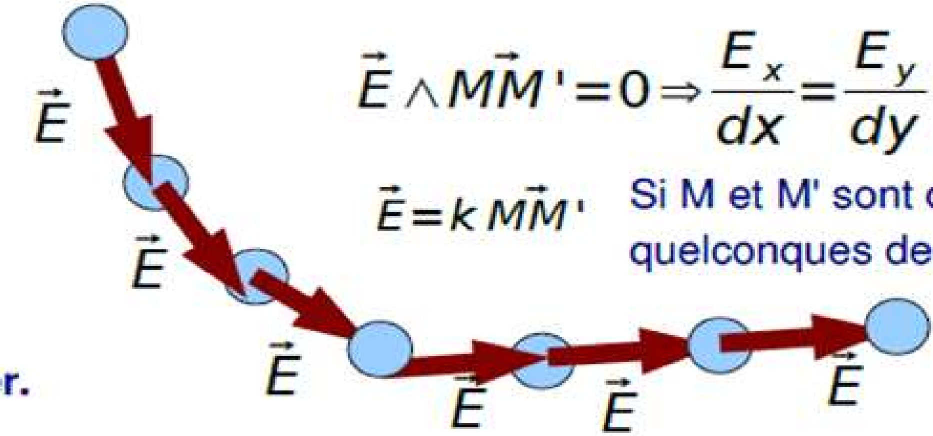
→ Champ de vecteurs : $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{Cste}$ (module, direction et sens)

● Un champ **invariant** (scalaire/vecteur): Indépendant du temps.

Ligne de champ / Tube de champ

$\rightarrow$ Ligne de champ : courbe tangente en chacun de ses points au vecteur champ.

Une charge plongée dans le champ à un endroit quelconque va suivre une ligne de champ

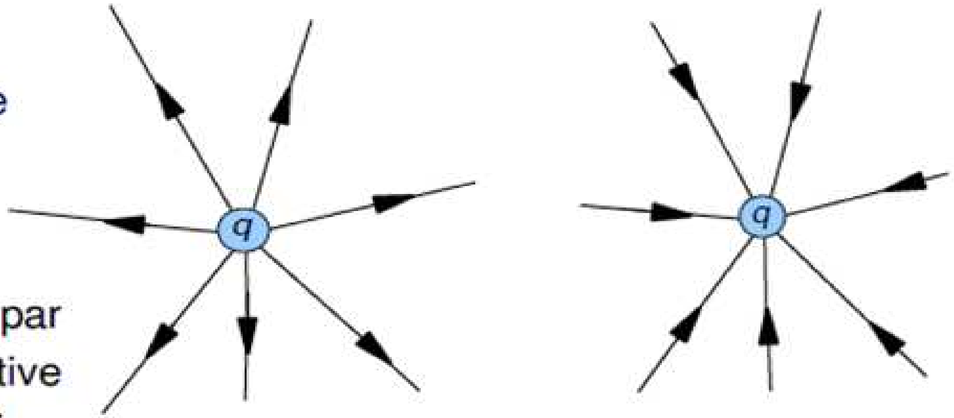


$$\vec{E} \wedge \vec{MM'} = 0 \Rightarrow \frac{E_x}{dx} = \frac{E_y}{dy} = \frac{E_z}{dz}$$

$\vec{E} = k\,\vec{MM'}$ Si M et M' sont deux points quelconques de l'espace

Si **E** n'est pas nul, **les lignes de champ ne peuvent pas se couper.**

Elles peuvent par contre **converger** vers une charge négative ou **diverger depuis** une charge positive



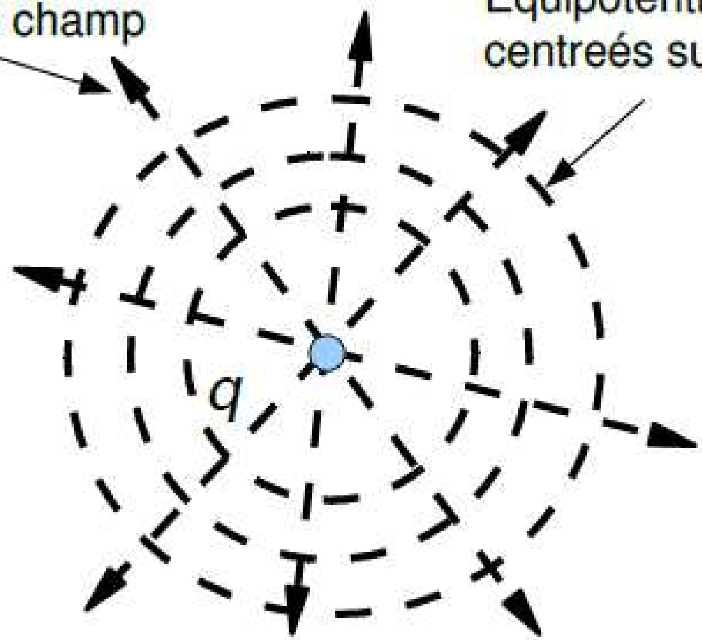
Lignes de champ créés par une charge ponctuelle positive et négative

$\rightarrow$ Tube de champ : ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

Surfaces équipotentielles

Les surfaces équipotentielles sont les lignes reliant les points de potentiel identique

Elles sont par définition **perpendiculaires aux lignes de champ**



Exemple du champ créé par une charge ponctuelle : tous les points situés à la même distance de la charge (sphère) sont au même potentiel

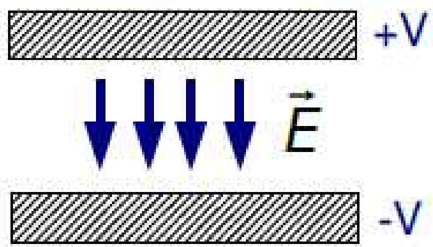
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$dV = \vec{\nabla} V \, . \, d\vec{OM}$$

$$\text{Si} : dV = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} V \, . \, d\vec{OM} = 0$$

*Donc le gradient est perpendiculaire à **MM'** donc à la ligne de champ*

Le champ « descend » les potentiels



Opérateurs différentiateurs

- il existe 3 opérateurs différentiels principaux appelés **rotationnel**, **divergence**, **gradient** qui généralisent la notion de dérivée
- ces 3 opérateurs peuvent s'exprimer avec l'opérateur **nabl** (english : *del*) (défini uniquement en coord. cartésiennes)

$$\mathrm{grad}(f) = \vec{\nabla}.f$$
$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla}.\vec{F}$$
$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z = \begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{bmatrix}$$

- ils définissent des relations **locales** :
• valables en tout point
• il faut intégrer pour atteindre les quantités physiques

Opérateurs différentiateurs

1. Opérateurs scalaire

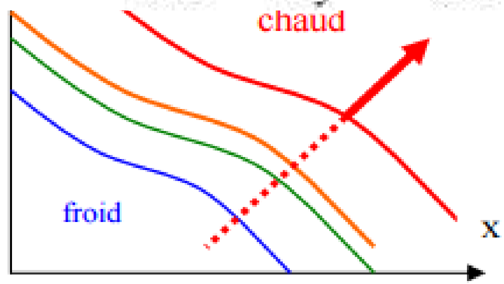
Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla} f$ $\qquad \overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$

- s'applique à un champ de scalaires
- donne un champ vectoriel

$$gr\vec{a}dT = \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

- **caractérise une variation d'une grandeur physique**

Physiquement, ***Grad est le taux de variation d'une grandeur scalaire.*** Grad T constitue un champ de vecteurs $\perp$ aux surfaces de niveau, dirigés vers les valeurs scalaires les plus grandes.



T(x,y,z) un champ de scalaires (température par exemple)

Différentielle de f(x,y,z):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \overrightarrow{grad}f\,.\overrightarrow{dl} \rightarrow (coord\ cartésiennes)$$

Où $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$: vecteur déplacement élémentaire.

$$Si \rightarrow f(M) = Cste, df = 0 = \overrightarrow{grad}f\,.\overrightarrow{dl} \Rightarrow \overrightarrow{grad}f \perp \overrightarrow{dl}$$

➡ Le gradient est perpendiculaire aux surfaces de valeurs constantes du champ scalaire (surfaces équipotentielles).

Laplacien de f(x,y,z): est un opérateur d'ordre deux, il mesure les irrégularités dans les valeurs d'une fonction.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} f$$

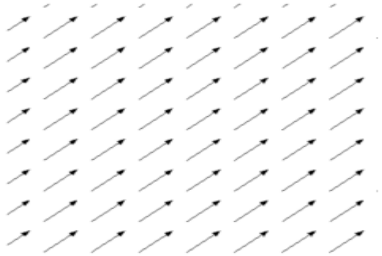
Opérateurs différentiateurs

2. Opérateurs vectoriels

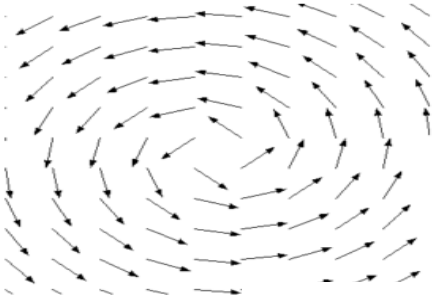
Rotationnel (*curl*) $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ de vecteurs

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]\vec{k}$$

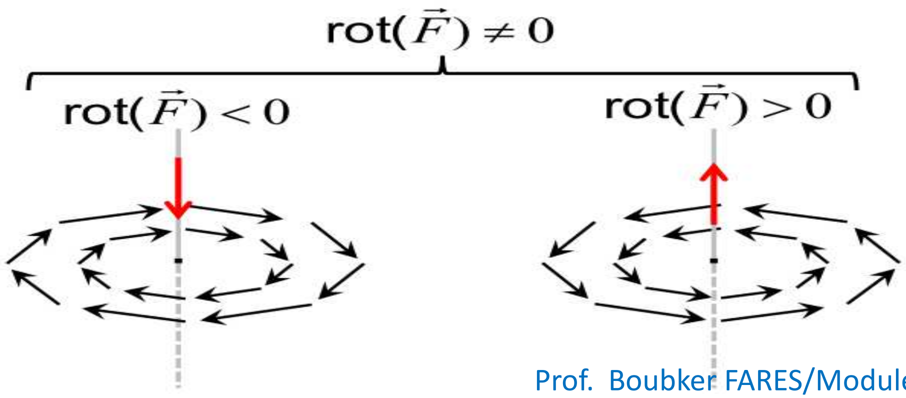


$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ - champ « irrotationnel »



$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} \neq \vec{0}$

- champ « tourbillonnant », « tournoyant »
- le champ résultant est perpendiculaire au plan du tourbillon (comme l'axe d'une toupie), ici vers le haut

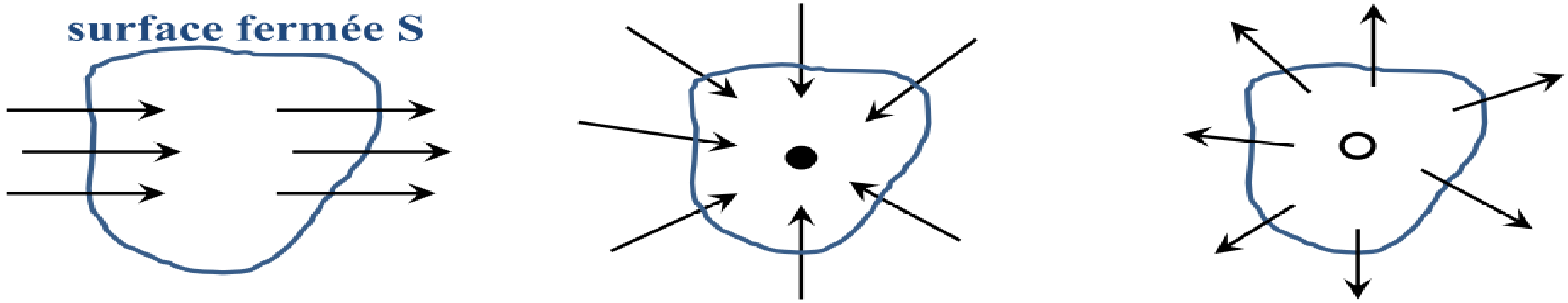


Opérateurs différentiateurs

2. Opérateurs vectoriels

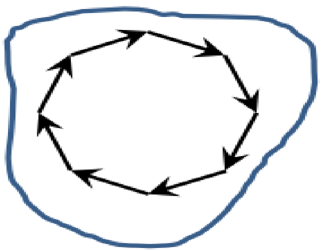
Divergence $\vec{\nabla}.\vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ scalaire



$\mathrm{div}(\vec{F}) = 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}(\vec{F}) < 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}(\vec{F}) > 0$

il existe une *source* ou un *puits* pour le champ
(symbolisés par ● et ○)



$$div\left(\vec{F}\right) = \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

champ « tournoyant »

$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{F})) = 0$ car rot(F) est un champ axial

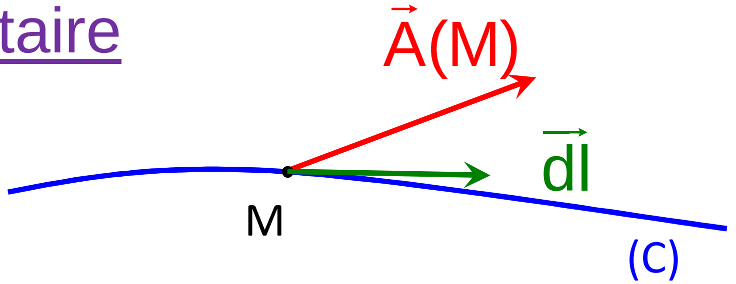
Intégrales vectorielles

1. Circulation d'un vecteur

$\rightarrow$ le point d'application de $\vec{A}(M)$ décrit la courbe (C).

$\rightarrow$ $dC = \vec{A}(M)\cdot\vec{dl}$ = circulation élémentaire

$$\Rightarrow \boxed{C = \int_C dC = \int_C \vec{A}(M)\cdot\vec{dl}}$$



- Si (c) est fermée $\rightarrow C = \oint_C \vec{A}(M).\vec{dl}$
- Si $C = \oint_C \vec{A}(M).\vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{A}(M)$ est à circulation conservative

exemple: travail d'une force de rappel le long d'un déplacement **rectiligne**.

$$dW = -k\,\vec{r}\cdot d\vec{r} \qquad W = \int_{r_1}^{r_2} -k\,\vec{r}\cdot d\vec{r} = -k\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r_1}^{r_2}$$

Intégrales vectorielles

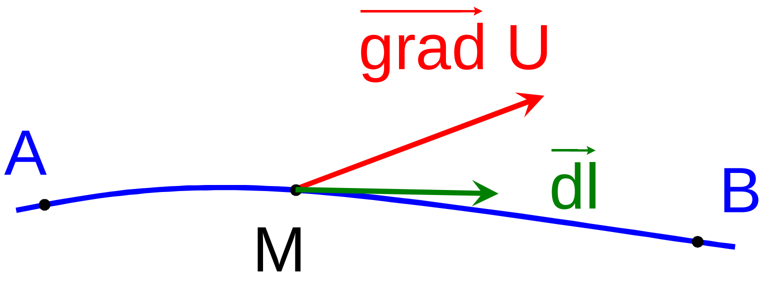
<u>Propriétés de la circulation</u>

★ Si $\vec{A} \perp \vec{dl} \Rightarrow \vec{A}.\vec{dl} = 0 \Rightarrow dC = 0$

★ Si $\vec{A}(M)$ tangent à dl $\Rightarrow \vec{A}.\vec{dl} = A.dl \Rightarrow dC = A.dl$

★ Si $\vec{A}(M)$ est un champ de gradient ($\vec{A} = \overrightarrow{grad} f$), la circulation du gradient d'un point A à un point B est égale à la variation du champ entre A et B:

$$C = \int_A^B \overrightarrow{grad}\, U \cdot \vec{dl} = \int_A^B dU = U_B - U_A$$: Indépendant du chemin suivi.



Exemple :

Champ électrostatique :

$$\vec{A} = \vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$$

Intégrales vectorielles

2. Flux d'un champ de vecteurs

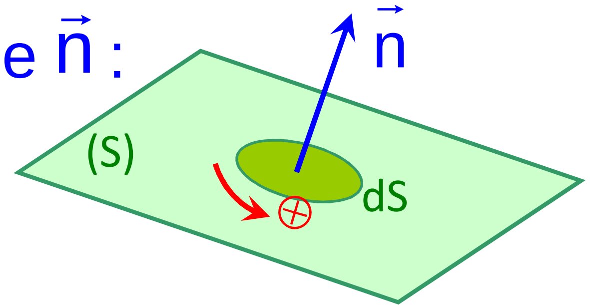
a. Orientation de surface

- Surface ouverte (S) :

Orienter (S) = choisir un sens ⊕ à la normale $\vec{n}$:

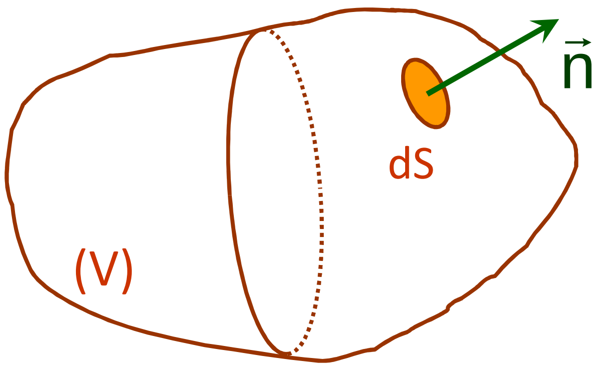
$\rightarrow$ règle du " tire-bouchon "

$\rightarrow$ vecteur-surface: $\overrightarrow{dS} = \vec{n} \cdot dS$



$\vec{n}$ vecteur unitaire normal à dS.

- Surface fermée : orientée de l'intérieur vers l'extérieur.



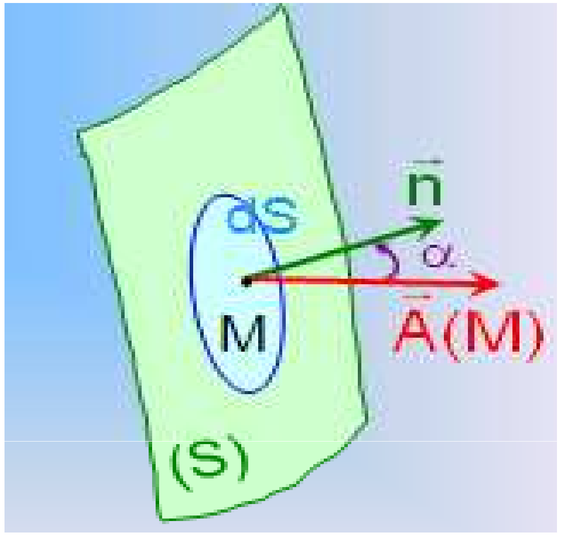
Intégrales vectorielles

2. Flux d'un champ de vecteurs

b. Définition du flux

$\rightarrow$ (S) surface orientée quelconque.

$\rightarrow d\Phi_{\vec{A}/S} = \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS}$ = flux élémentaire



$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{\vec{A}/S} = \iint_S \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_S A.dS.\cos\alpha}$$

★ $\Phi_{\vec{A}/S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}(M) \perp \overrightarrow{dS}$

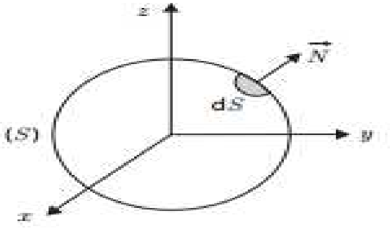
★ Si $\iint_{S\,(fermée)} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 0$: $\vec{A}$ est à flux conservatif (flux entrant = flux sortant)

Exemple . Champ à symétrie sphérique

Calculer le flux du vecteur $V(M) = f(r)\vec{e}_r$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.

On a tout simplement :

$$\Phi = \oiint_S \vec{V}\cdot\vec{N}\,dS = \oiint_S f(r)\,dS = 4\pi r^2\,f(r)$$



car $f(r)$ est constant quand on se déplace sur la sphère.

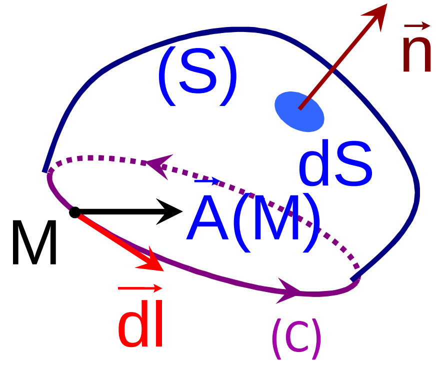
Intégrales vectorielles

3. Théorèmes intégraux

a. Théorème de Stockes / Champ conservatif

$\rightarrow$ (C) courbe fermée orientée.

$\rightarrow$ (S) surface quelconque s'appuyant sur (C).



$$\boxed{\int_{(C)} \vec{A}(M) \cdot \vec{dl} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\, \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{dS}}$$

Champ à circulation conservative :

$$C = \oint_{(C)} \vec{A}(M) \cdot \vec{dl} = 0 \qquad \forall\ (C) \text{ fermée}$$

alors: $\rightarrow$ $\overrightarrow{rot}\, \vec{A} = \vec{0}$

$\rightarrow$ Si $\vec{A} = \overrightarrow{grad}\, U \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rot}\, \vec{A} = \vec{0}$

un champ de gradient est un champ à circulation conservative

Intégrales vectorielles

b. Théorème de Green-Ostrogradsky

S surface fermée quelconque entourant un volume V.

$\vec{A}(M)$ champ de vecteurs.

$$\boxed{\Phi_{\vec{A}/S} = \oiint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{ds} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A} \cdot dv}$$

$\rightarrow$ Champ à flux conservatif: $\Phi_{\vec{A}/S} = \oiint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$

alors: $\rightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$

$\rightarrow$ le flux est le même à travers toute section d'un tube de champ.

Notion d'angle solide

1. Angle plat

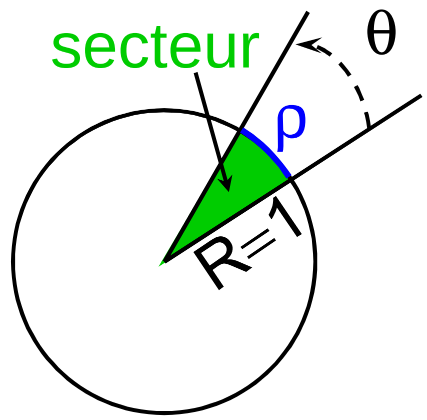
→ Arc de cercle $\rho = R\theta$

si R = unité, alors $\rho = \theta$

(θ mesure de l'angle plat)

⇒ $\theta_{total} = 2\pi R$ radian $= 2\,\pi$ radian

$$\theta = \frac{L}{R}$$

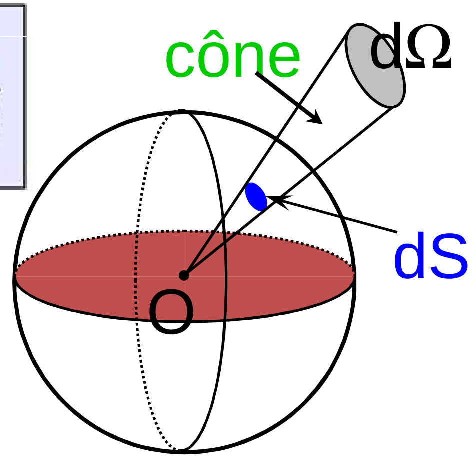


2. Angle solide

→ Sphère de rayon R = unité.

→ Le cône d'angle $d\Omega$ découpe sur la sphère une surface élémentaire $dS = d\Omega$ (par analogie avec l'angle plat)

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$

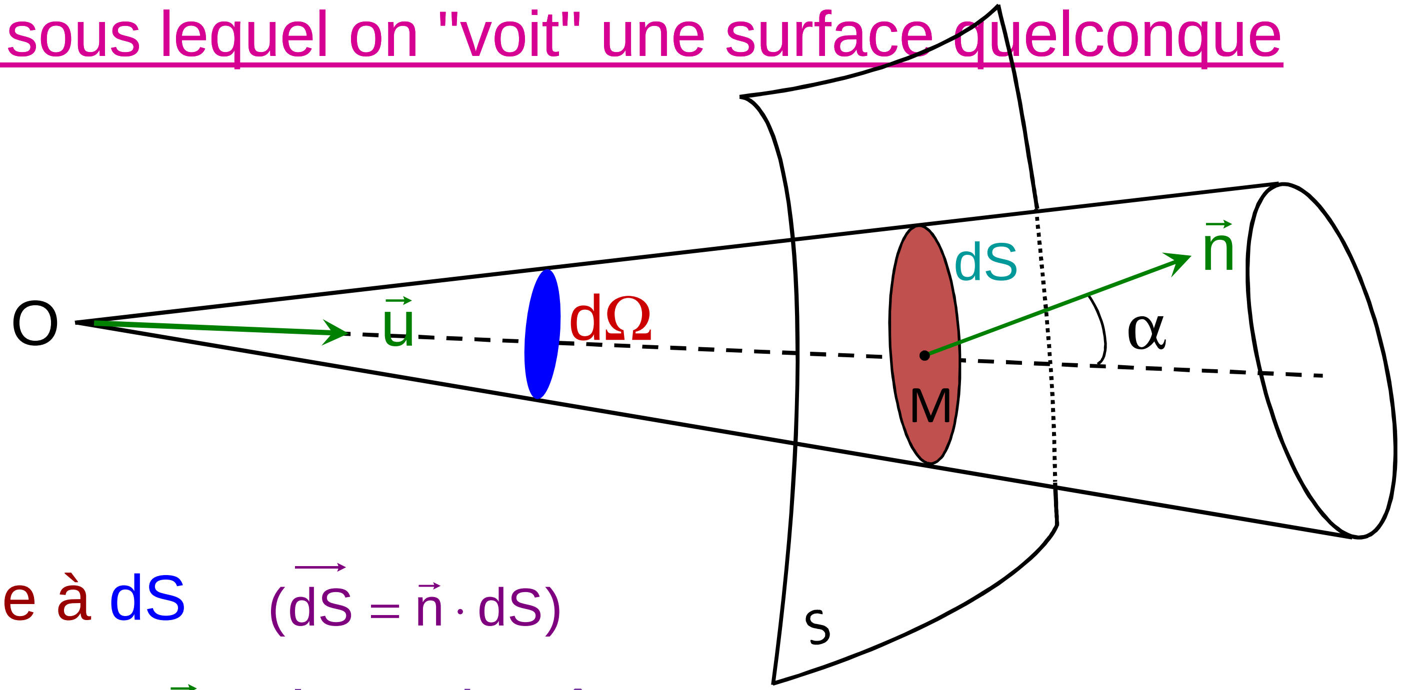


➔ $d\Omega$ est l'angle solide sous lequel on "voit" la surface dS à partir de O

$\Omega_{total} = 4\pi R^2 = 4\pi$ stéradian

Notion d'angle solide

3. Angle solide sous lequel on "voit" une surface quelconque



- $\overrightarrow{OM} = r\ \vec{u}$
- $\vec{n}$ normale à dS $\quad (\overrightarrow{dS} = \vec{n} \cdot dS)$
- α angle entre $\vec{n}$ et l'axe du cône

➔ Définition:

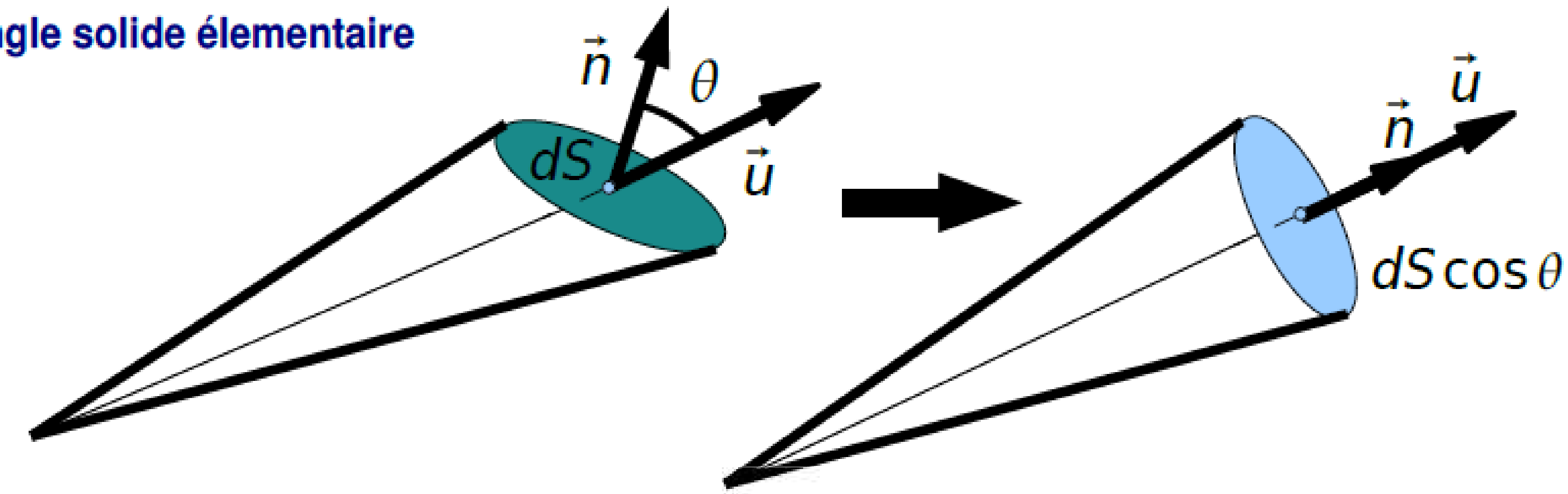
$$\boxed{d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{dS}}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos\alpha}{r^2}}$$

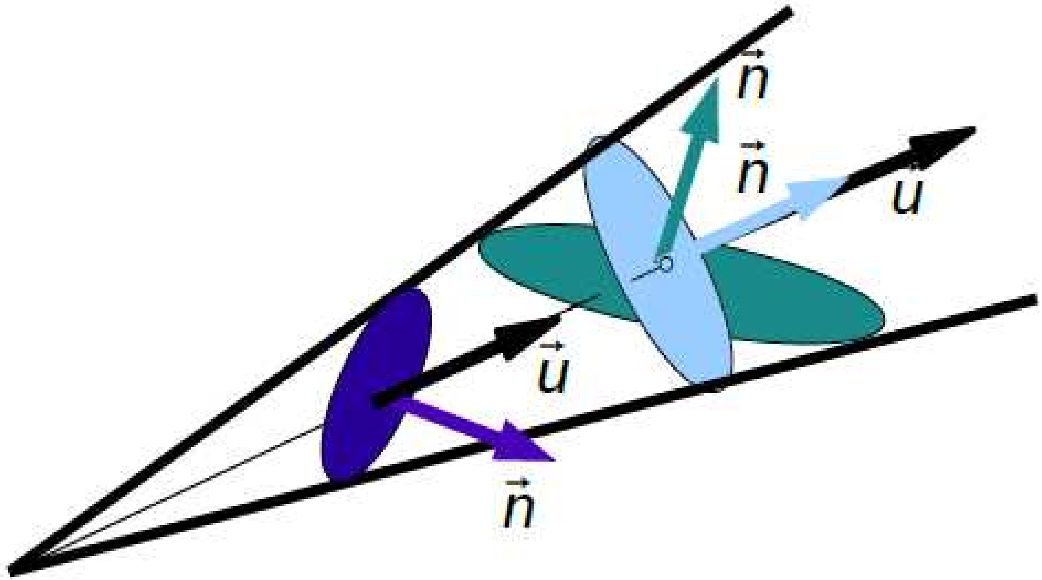
★ dS cos α = projection de dS sur la sphère (O,r) passant par M.

Notion d’angle solide

3. Angle solide sous lequel on "voit" une surface quelconque

angle solide élementaire





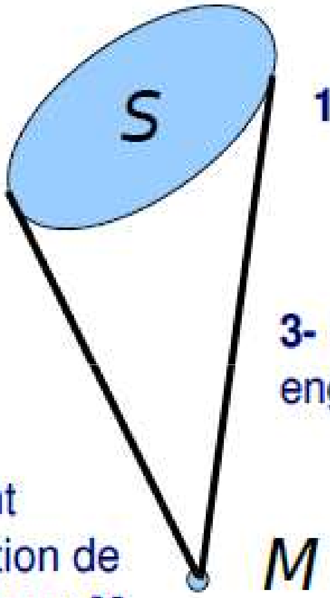
Toutes ces surfaces définissent **le même angle solide élémentaire Ω**

Elles sont limitées par le même cône.

Notion d’angle solide

3. Angle solide sous lequel on "voit" une surface quelconque

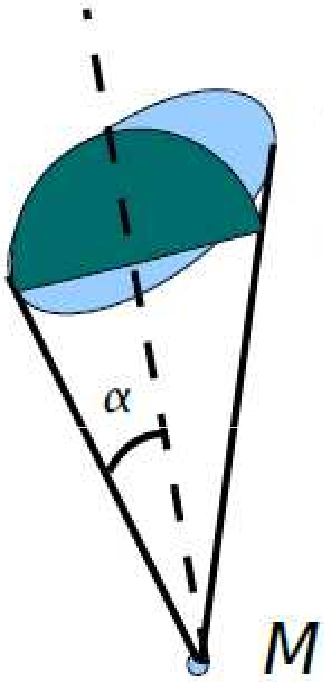
Pour calculer un angle solide (angle sous lequel est « vue » une surface S) il faut :



1 - Une surface

2- Un point d'observation de cette surface : **M**

3- Définir le cône qui englobe la surface



4- Définir une sphère s'appuyant sur le cône précédemment défini

5- Déterminer l'angle solide à partir de la surface de la sphère $\Omega = dS/r^2$.

On peut se rappeler l'angle solide Ω défini par un **cône** d'ouverture α : $\boxed{\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)}$

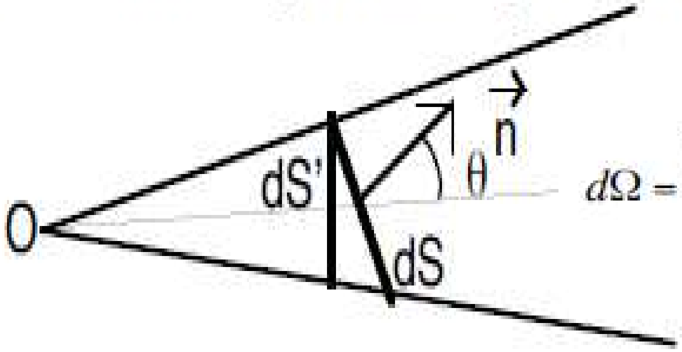
Notion d'angle solide

3. Angle solide sous lequel on "voit" une surface quelconque

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta = 2\pi(1-\cos\alpha)$$

Le demi-espace, engendré avec $\alpha=\pi/2$ (radians), correspond donc à un angle solide de 2π stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de 4π ($\alpha=\pi$).



$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}\cdot\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\,\vec{n}\cdot\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$