1$^{\text{ère}}$ partie

Chapitre IV

Dipôle électrostatique

I. Définitions

Dipôle électrostatique = ensemble de deux charges électriques ponctuelles opposés + q et – q, séparées par une distance a très petite par rapport à la distance r au point M où l'on observe leurs effets.

Moment dipolaire :

C'est le vecteur : $\vec{p} = q.\vec{AB}$ dirigé de –q vers +q.
Dans SI, p s'exprime en C.m. Cette unité étant très grande on utilise le debye(D) :
$1D = \frac{1}{3}.10^{-19}\,C.m$

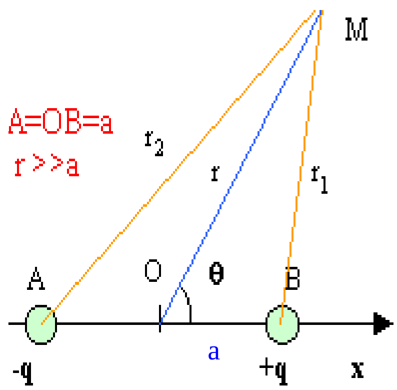
Exemple de dipôle : molécule polaire : H_2O

II. Potentiel créé par un dipôle

Le point M où l'on veut calculer le potentiel est repéré par ses coordonnées polaires : r=OM, θ=(Ox,OM).

On suppose r >> a=AB, O étant le milieu de AB.

Le potentiel V créé en M par le dipôle est :



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{AM} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+q}{BM} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right)$$

or : $BM^2 = (BO + OM)^2 = (OM - OB)^2 = OM^2 + OB^2 - 2OB.OM\cos\theta = r^2 + \frac{a^2}{4} - a.r.\cos\theta$

soit : $BM = r.\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}$

de même en changeant θ en π-θ, on obtient : $AM = r.\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}$

D'où :
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

r >> a d'où a/r << 1, on peut utiliser le développement limité au 1$^{\text{er}}$ ordre de la forme $(1+x)^n$ ou $(1-x)^n$:

On obtient :
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) - \left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)\right]$$

Où encore : $V = \dfrac{q.a.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ avec $r = \overrightarrow{OM}$

Pour θ = π/2, V=0 pour tous les points du plan médiateur de AB. Ce plan est une surface équipotentielle.

III. Champ électrostatique créé par un dipôle

Comme V ne dépend que de r et de θ, seules les composantes Er et E_θ de $\vec{E}$ seront non nulles. On a : $\vec{E} = -\vec{grad}V$, donc :

$$\vec{E}\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2p.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\, r^3} \\ E_\vartheta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{p.\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\, r^3} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Conclusion : Le champ créé par un dipôle est proportionnel à $\frac{1}{r^3}$ et le potentiel à $\frac{1}{r^2}$, alors que pour une charge ponctuelle, $\vec{E}$ créé est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$ et V à $\frac{1}{r}$.

→ pour M éloigné, $\vec{E}$ et V créés par le dipôle seront négligeable / à $\vec{E}$ et V créés par des charges situées à proximité du dipôle.

IV .Lignes de champ et surfaces équipotentielles d'un dipôle

IV.1 Lignes de champ

Par définition, un élément dl de ligne de champ est tangent à $\vec{E}$. On a :

$$\vec{E}\begin{cases} E_r \\ \\ E_\theta \end{cases},\quad d\vec{l}\begin{cases} dr \\ \\ rd\theta \end{cases},\ \vec{E} \text{ et } d\vec{l} \ \text{ tangents} \rightarrow \vec{E}\wedge d\vec{l} = \vec{0}, \text{ donc} : rd\theta.E_r - dr.E_\theta = 0 \rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta$$

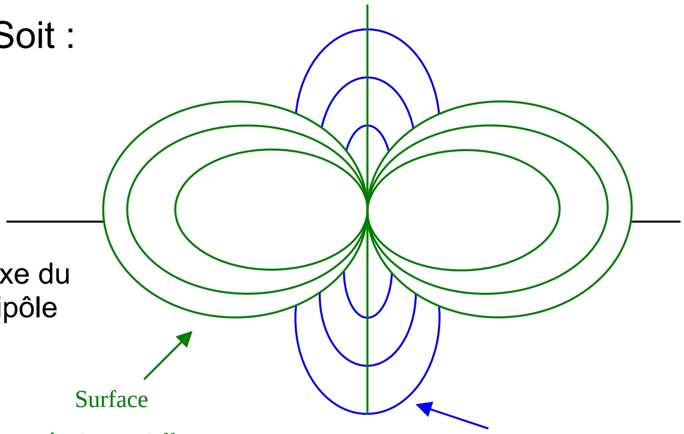
soit : $\dfrac{dr}{r} = 2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta \rightarrow Lnr = 2.Ln|\sin\theta| + Lnk \rightarrow r = k.\sin^2\theta$

IV.2 Surfaces équipotentielles

Ensemble des points pour lesquels V = cte. Soit :

$$V = \frac{p.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = cte \rightarrow \ r^2 = k'\cos\theta$$

Ce sont des surfaces de révolution autour de Ox.



V. Energie du dipôle

V.1 Energie interne du dipôle

C'est l'énergie contenu dans le dipôle, c'est à dire dans les deux charges – q et +q situées à la distance a l'une de l'autre. Elle correspond à l'énergie nécessaire pour amener une charge de l'infini à une distance a de l'autre charge.

Supposons – q en A et amenons +q de l'infini à B. Le travail mis en jeu est :

$$dT = -\vec{F}.d\vec{l} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(-dr),$$ car r décroit → dl<0 et dT < 0

dT correspond à la variation de l'énergie interne du dipôle. L'énergie du dipôle est alors :

$$W_0 = T = \int -\vec{F}.d\vec{l} = \int_{\infty}^{a} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0\, a} = W_f - W_i < 0$$

V.2 Energie du dipôle placé dans un champ E

C'est l'énergie nécessaire pour amener +q et –q de l'infini à leur position en B et A. On a : $T = q\ (V_{final} - V_{initial})$

- pour (-q) on a : $T_{\infty\rightarrow A} = (-q)(V_A - 0) = -qV_A$

- pour (+q) on a : $T_{\infty\rightarrow B} = (+q)(V_B - 0) = +qV_B$

donc : $W = q.V_B - q.V_A = q\ (V_B - V_A)$

Or : $dV = \overrightarrow{grad}V.d\vec{l} \quad \rightarrow \quad -dV = \vec{E}.d\vec{l}$

$$V_A - V_B = \int_A^B - dV = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l} = \int_A^B E.dl.\cos\alpha = E.\cos\alpha.\int_A^B dl = E.\cos\alpha.\ a = \vec{E}.\vec{AB}$$

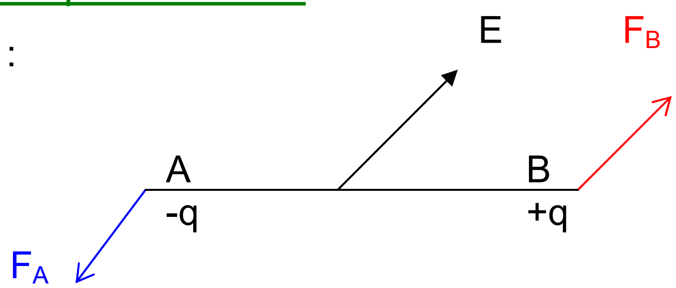
D'où : $\boxed{W_{dipôle} = q\,(V_B - V_A) = -q.\ E.\ AB = -\vec{p}\ .\ E}$

IV.3 Mouvement du dipôle dans un champ E uniforme

Le dipôle est soumis à un couple de forces :

Même intensité, directions différentes

et sens opposés.



Ce couple est caractérisé par son moment $\vec{\Gamma}$.

$$\vec{\Gamma} = \vec{OA} \wedge \vec{F_A} + \vec{OB} \wedge \vec{F_B} = \vec{OA} \wedge -q.\vec{E} + \vec{OB} \wedge q.\vec{E} = (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge\ q.\vec{E} = \vec{AB} \wedge\ q.\vec{E} = q.\vec{AB} \wedge \vec{E}$$

donc : $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$

Equilibre du dipôle :

$$dipôle\ en\ équilibre \rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{0} \rightarrow p.E.\sin\alpha = 0 \rightarrow \sin\alpha = 0$$

α = 0 : équilibre stable du dipôle ;

α = π : équilibre instable du dipôle ;

Le couple tend à orienter le dipôle de façon que p ait la même direction et le même sens que E.

Application : Matérialisation des lignes de champ : les particules qui sont des dipôles (par exemple les grains de semoule), plongé dans E, s'orientent en dessinant les lignes de champ.