

Analyse 3

Dérivée successive

$$x^m \rightarrow m!$$

$$e^x \rightarrow e^x$$

$$e^{mx} \rightarrow m^m e^{mx}$$

$$a^x \rightarrow a^x (\ln a)^m$$

$$\sin x \rightarrow \sin(x + m \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\cos x \rightarrow \cos(x + m \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(mx) \rightarrow m^m \sin(x + m \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(mx) \rightarrow m^m \cos(x + m \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\sinh x \rightarrow \begin{cases} \sinh(x) & \text{si } m \text{ pair} \\ \cosh(x) & \text{si } m \text{ impair} \end{cases}$$

$$\cosh x \rightarrow \begin{cases} \cosh(x) & \text{si } m \text{ pair} \\ \sinh(x) & \text{si } m \text{ impair} \end{cases}$$

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \rightarrow a_0 m!$$

$$x^m \rightarrow m \cdot (m-1) \dots (m-m+1) x^{m-m}$$

les classes $C^m(I)$; $C^\infty(I)$

Soit $m \in \mathbb{N}$ f est de classe C^m

sur I si :

- f est m -fois dérivable sur I

- $f^{(m)}$ est continue sur I

① $C^m(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions de classe C^m sur I

$C^0(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions continues sur I

$C^\infty(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions dérivable à n'importe quel ordre entier

Formule de Leibniz

f et g des fonctions m -fois dérivables.

$$(f \cdot g)^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k f^{(k)} g^{(m-k)}$$

$$\text{avec } C_m^k = \frac{m!}{k! (m-k)!}$$

$$C_m^0 = 1 \quad ; \quad C_m^1 = m$$

la f qui va s'annuler on le met à la puissance k

Fonction Convexe

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$f^{(2)}(x) \geq 0$$

$$\Phi_\beta(x) = \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \quad \text{croissante}$$

$$\beta \in I$$

Fonction Concave

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
$$f^{(k)}(x) < 0$$

Inégalité de Jensen

f une fct convexe sur un intervalle I ssi

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_m \in I \text{ et } \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in [0,1] \text{ tq } \sum \lambda_i = 1$$

On a :

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

Régularité des fcts Convexes

Soit $a, b \in I$ / $a < b$

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_g(b)$$

Polynôme de Taylor

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Reste de Taylor

$$R_m(x) = f(x) - P_m(x)$$

Formule de Taylor

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x)$$

Formule de Taylor - Lagrange

Soit f une fct de classe C^n

Tq $f^{(n)}$ dérivable sur $]a, b[$

alors $\exists c \in]a, b[$ tq :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Corollaire

Soit f une fct de classe C^n

Tq $f^{(n)}$ dérivable sur I

Supposons que :

$$\sup |f^{(n+1)}(x)| = M < \infty$$

Fixons $x_0 \in I$, alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fct $\sin$ au point où l'ordre 3 nous obtenons :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(c)}{4!} x^4$$

Formule de Taylor young

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

$$\lim \varepsilon(x) = 0$$

Formule de Taylor avec reste intégral

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fct de classe
 C^{n+1}

Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

Inégalité de Taylor - Lagrange

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq$$

$$M \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \in [a, b])$$

Développement limité

Fonction négligeables

f est négligeable devant g au
voisinage x_0 s'il existe une fct
 ε définie au voisinage x_0

$$f(x) = g(x) \cdot \varepsilon(x) \quad \text{avec}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\text{On note } f = o(g)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

③ Au voisinage de 0

Si $\alpha > \beta$ cma :

$$\bullet x^\alpha = o(x^\beta)$$

$$\bullet \ln(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

Au voisinage de $+\infty$

Si $\alpha > \beta$ cma :

$$\bullet x^\beta = o(x^\alpha)$$

$$\bullet \ln(x) = o(x^\alpha)$$

$$\bullet x^\alpha = o(e^x)$$

Proposition

$$f = o(g) \Rightarrow f \cdot h = o(g \cdot h)$$

$$f = o(g) \text{ et } h = o(k)$$

$$\Rightarrow f \cdot h = o(g \cdot k)$$

$$f_1 = o(g) \text{ et } f_2 = o(g)$$

$$\Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$$

Fonction équivalentes

f est équivalente à g au
voisinage de x_0 s'il existe une

fct h définie au voisinage x_0

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \text{avec}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$$

$$\text{On note } f \sim_{x_0} g$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Au voisinage de 0

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\sin(x) \sim x$$

$$\operatorname{tg}(x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$$

Proposition

Si $f \sim g$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existe ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et s'elle existe ces deux sont égaux

$$\text{Si } f \sim g \text{ et } h \sim k$$

$$\Rightarrow f \cdot h \sim g \cdot k$$

$$\Rightarrow \frac{f}{h} \sim \frac{g}{k}$$

la somme n'est pas très équival.

Formule de Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(0) + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(c)$$

Cas particuliers de la Formule de Taylor

$$\text{Si } m=0$$

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(c)$$

④

Développement des fonctions usuelles:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n) \quad (8)$$

- Si on divise sur x l'ordre diminue
- Si on multiplie par x l'ordre augmente
- Si on dérive l'ordre diminue
- Si on intègre l'ordre augmente

Tangente et asymptote

elles représentent le 1^{er} terme de la décomposition notée y

la position de la courbe

$f(x) - y \rightarrow$ Si > 0 la courbe est au-dessus de la tangente

$\rightarrow$ Si < 0 la courbe est au-dessous de la Tangente

les branches infinies

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ (cf) admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (cf) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ (cf) admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (cf) admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$ (cf) admet une branche parabolique d'équation $y = ax$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$ (cf)

admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$