

Développement limités:

Formules de Taylor:

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = T_n(x) + R(x).$$

partie polynomiale

Reste

• Partie polynomiale: $T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$

→ on considère la fonction $f: x \rightarrow \dots$.

on a f est de classe C^n sur $]a, b[$ (et sa dérivée $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$). Alors $\exists c \in]a, x[$, D'après la formule de Taylor Lagrange, on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

→ on considère la fonction $f: x \rightarrow \dots$.

on a f est de classe C^{n+1} sur $]a, b[$. D'après la formule Taylor avec reste intégrale, on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$$

→ on considère la fonction $f: a \rightarrow \dots$.

on a f est de classe C^n sur $]a, b[$, $\exists \varepsilon$ tq $\lim_{x \rightarrow a_0} \varepsilon(x) = 0$.

D'après la formule Taylor young :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$\text{so } (x-a)^n \cdot \varepsilon(x) = o((x-a)^n).$$

• Développement limités

f admet un DL d'ordre n au $\mathcal{V}(a_0)$. si

$$\exists c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

• si f admet un DL alors ce DL est unique.

* DL des fonctions en un point quelconque

f admet un DL au $\mathcal{V}(a)$ si et ssi la fonction.

$h \mapsto f(h+a)$ admet un DL au $\mathcal{V}(0)$.

utilisé le changement de variable $h = x - a$.
pour revenir au cas du point 0.

→ Somme :

$$(f+g)(x) = A_n(x) + B_n(x) + o((x-a_0)^n).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{partie polynomiale de } f} \quad , \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{partie polynomiale de } g}$

→ produit :

$$(f \times g)(x) = T_n(x) + o((x-a_0)^n) ; \deg(T_n) \leq n$$

→ composition :

Si $g(a) = a$, Alors $f \circ g$ admet DL en a à l'ordre n . $f \circ g = f(g(x))$.

$$f \circ g = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{"deg } T_n \leq n \text{"}$$

→ Division :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$$g(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \dots + d_n(x-a)^n + o(x-a)$$

$$\frac{1}{g(x)} = h(y) = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \dots$$

$d_0 = 0$ • on factorise par x^n afin de se ramener aux cas précédents.	$d_0 \neq 0$ $y = \frac{d_1}{d_0}(x-a) + \dots + \frac{d_n}{d_0}(x-a)^n$ $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \left(\frac{1}{1+y} \right)$	$d_0 = 1$ $y = d_1(x-a) + \dots + d_n(x-a)^n$ $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1+y}$
---	--	--

→ intégration :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \varepsilon(x)$$

primitive F admet un DL en a à l'ordre n .

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1(x-a)^2}{2} + \dots + \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1}) \quad \text{L} \varepsilon(x) = 0$$

* calculs de limites

$$h: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

pour calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$...

$$f(x) = a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

$$g(x) = b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

$$n_f = \inf \{k \in \{1, \dots, n\}, a_k \neq 0\}, \quad n_g = \inf \{k \in \{1, \dots, n\}, b_k \neq 0\}$$

• $n \in \mathbb{N} \mid n_g \leq n \Rightarrow$

$$\rightarrow \text{Si } n_f > n_g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0.$$

$$\rightarrow \text{Si } n_f = n_g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \frac{a_{n_f}}{b_{n_g}}$$

$$\rightarrow \text{Si } n_f < n_g \Rightarrow h \text{ a une limite infinie } \bar{\alpha} \text{ gauche et } \bar{\alpha} \text{ droite}$$