

- classe:

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $C^n \Leftrightarrow f$ n fois dérivable
et f^n continue

+ Formule de Taylor

Trois formes de Taylor:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

→ Formule de Taylor Young

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n et $a \in \mathbb{R}$ alors $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \\ + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

→ Formule de Taylor avec Reste intégral:

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} et soit $x, a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \\ + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

Développement, Limites

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un DL au point a
d'ordre n

$\exists$ un réel $c_0, c_1, \dots, c_n$ et une fct $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \underbrace{(x-a)^{n+1} \varepsilon(x)}$$

— Partie polynomiale
— le reste

$$x^n \varepsilon(x) = o(x^n)$$

Limite

$$f = g \circ h$$

$$\rightarrow \text{si } n_f > n_g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$$

$$\rightarrow \text{si } n_f = n_g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \frac{a n_f}{b n_g}$$

$$\rightarrow \text{si } n_f < n_g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \pm \infty$$

Deve li au image de a

On pose $h = x - a$

$$h \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow a$$

$$x = h + a$$

DL en ∞

$f:]x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ admet un DL en $+\infty$ si et seulement si il ex. $C_0, C_1, \dots, C_n$ en tq

$$f(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} \mathcal{E}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{avec } \mathcal{E}\left(\frac{2}{x}\right) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \infty$$

Soit tel $\forall \epsilon > 0$

On change de variable

$$x = \frac{2}{t}, \quad x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty$$

$$\frac{F}{g} = F \times \frac{2}{2+u} \quad \text{avec } g = 2+u$$

changement de variable

on voit que $\frac{2}{2+u} = (2+u)^{-1} = 2 - u + u^2 - u^3 + \dots$
 $(-1)^n u^n + o(x^n)$

On a $F(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + o(x^n)$
 $g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n + o(x^n)$

Exercice

de $\tan x$ à l'ordre 4.

Si $d_0 = 2$

on pose u

$$u = d_1 x + \dots + d_n x^n + o(x^n)$$

Si $d_0 \neq 0$, on pose

$$u = \frac{2}{d_0} \left(\frac{2}{2 + \frac{d_1 x}{d_0} + \dots + \frac{d_n x^n}{d_0} + o(x^n)} \right)$$

Si $d_0 = 0$

on factorise par x^k

• DC des fonctions usuelles à l'origine (avantage de 0)

$$\bullet \exp = 1 + n + \frac{x^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \dots + \frac{n^n}{n!} + O(n^n)$$

$$\bullet \cosh(n) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\bullet \sinh(n) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\bullet \cos(n) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})$$

$$\bullet \sin(n) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\bullet \ln(2+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^n)$$

$$\bullet (2+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1})$$

$$\bullet \frac{2}{2+x} = 2 - n x + n^2 x^2 - \dots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1})$$

$$\bullet \frac{2}{2-x} = 2 + n x + n^2 x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$$

$$\bullet \sqrt{2+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{16} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} x^n + O(x^{n+1})$$

DL des fonctions en un point quelconque

- la fct f admet un DL au voisinage d'un point a si $h \mapsto f(h+a)$ admet un DL au voisinage de 0.
- On effectue alors le changement de variable $h = x - a$ pour revenir au cas du point 0.

Opérations sur les développements limités:

Soit P un polynôme de degré $m \in \mathbb{N}$ / $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$P(h) = \sum_{k=0}^m a_k (h - h_0)^k$$

$\rightarrow (f + g)$

$$f(x) + g(x) = (P_1(x) + P_2(x)) + \underline{\underline{x^r E(x)}}$$

$g \circ f$

si $\boxed{f(0) = 0}$ alors la fct admet $g \circ f$ admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre n .

→ Formule de Taylor Lagrange :

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} et soit $a, u \in I$

$\exists c \in (a, u)$ tq

$$f(u) = f(a) + f'(a)(u-a) + \frac{f''(a)(u-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(a)(u-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(u-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$c \in]a, u[$, lorsque $n \geq 0$, on trouve de T.A.R.

→ Soit $f^{(n+1)}(c) \leq M \quad \forall c \in I \Rightarrow |f(x) - T_n(x)| \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Démo :

$$f^{(n+1)}(c) \leq M$$

$$\text{on a } f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x)$$

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(x) - T_n(x) \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$M = \sup |f^{(n+1)}(u)|$$