

Analyse 3

Formule de Taylor - Développement l.m.t.

les classes : I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

C^0 : une fonction est dite de classe C^0 sur I , si elle est continue sur I
 $\Rightarrow f \in C^0(I)$

C^1 : f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I
 $\Rightarrow f \in C^1(I)$

C^n : pour $n \geq 2$, on dit que f est n fois dérivable sur I , si f est $n-1$ fois dérivable et que la $(n-1)^{\text{ème}}$ dérivée, notée par $f^{(n-1)}$ est dérivable et $f^{(n)}$ est continue sur I

Propriété :

Si f et g sont n fois dérivable sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$ et λf sont n fois dérivable sur I et :

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad - \quad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

$\rightarrow$ la classe $C^n(I)$ est un espace vectoriel, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C^∞ : si f est C^n sur I pour tout n
autrement dit si f est indéfiniment dérivable sur I .

La plupart des fonctions usuelles (polynômes, e^x , $\ln$, trigo, ...) sont C^∞ sur leur domaine de définition.

Développements limités et applications

Fonction négligeables

(grand 0)

est plus petit que $f(x)$ au voisinage de x_0

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on note $f = o(g)$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que

$$f(x) = g(x) \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Remarque : Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0

$$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Propositions

- Si $f = o(g)$ au voisinage de x_0 et h définie aux mêmes valeurs $f \cdot h = o(g \cdot h)$
- Si $h = o(g)$ et $h = o(k)$ au vois. x_0 alors $f \cdot h = o(g \cdot k)$
- Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$

Fonctions équivalentes

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 et on note $f \sim g$ s'il existe une fonction h définie au v. x_0 telle que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$

Remarque

Si g ne s'annule pas au v. x_0

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Propositions

- Si $f \sim g$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe et si elles existent, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- Si $f \sim g$, $h \sim k$ alors $f \cdot h \sim g \cdot k$
- Mais $f \cdot h$ n'est pas forcément équivalent à $g \cdot k$

DL des fonctions en un point quelconque :

La fonction f admet un DL au voisinage a si et seulement si la fonction $h \mapsto f(h+a)$ admet un DL au voisinage de 0. Nous allons donc utiliser le changement de variable $h = x - a$ pour revenir au cas de 0.

DL de e^x au vois 1 :

on pose $h = x - 1$, Puisque $x \rightarrow 1$, $h \rightarrow 0$ donc :

$$e^x = e^{h+1} = e^h \cdot e = e \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + o(h^n) \right)$$

$$= e \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o_1\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

Développement limité des fonctions usuelles

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

(impair, + - + -)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

(pair, + - +)

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

(impair, + + +)

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \dots + (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \Rightarrow (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\rightarrow \int \ln(1+x) = \text{cte} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$f(0) = f'(0) = 0$

$o(x^n)_{n \rightarrow \infty} = o(x^{n+1})$

Développement limité au voisinage (0)

Propriété

Le DL_n(0) est donné par la formule de Taylor-Laurie. Si on a
$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\text{partie régulière}} + o(x^n) \quad \left(\begin{array}{l} f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0 \\ \text{ou } f^{(n)}(0) \neq 0 \end{array} \right)$$

avec $o(x^n)$: les fonctions qui tendent vers 0 plus vite que x^n

$$o(x^n) = x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0$$

Le DL_n est à la formule de Taylor-Laurie (Taylor-Lagrange)

Taylor-Lagrange : $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$

DL : $f(x) = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$

avec

$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \\ \vdots \\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{cases}$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^n \cdot x = E(x) \cdot x^n$$

$$R = E(x) \cdot x^n \underset{L+0 \text{ au voisinage de } 0}{=} o(x^n)$$

Formule de Mac lauren: au voisinage de 0

Si: $b = \alpha$ et $a = 0$ alors.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad (0 < c < \alpha)$$

$$= f(0) + \alpha f'(0) + \frac{\alpha^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Pour un certain point c entre 0 et x , Par conséquent

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) \right| \leq \frac{x^4}{4!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le cas particulier de $x = 0,01$, nous déduisons :

$$\left| \sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{3!} \right) \right| \leq \frac{10^{-8}}{4!}$$

Par conséquent :

$$\left| \sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{3!} \right) \right| \leq 10^{-9}$$

On dit alors que la valeur $p = 0,01 - \frac{(0,01)^3}{3!}$ est une valeur approchée de $\sin(0,01)$ à 10^{-9} près, ainsi notre approximation p de $\sin(0,01)$ donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.

Formule de Taylor avec reste intégral :

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} . Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

$$(n=0 : f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x) dx)$$

Formule de Taylor-Young :

Soient I un intervalle ouvert, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et $a \in I$. Alors, au voisinage de a ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

où ε est une fonction définie sur I vérifiant $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Définitions

Soit f une fonction de la classe $C^n(I)$ et soit x_0 un point de I . La formule de Taylor de f à l'ordre n au point x_0 est l'écriture:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad x \in I$$

où P_n et R_n sont respectivement le polynôme et le reste de Taylor.

Dans la suite, nous allons donner différentes expressions de la fonction selon la Taylor R_n .

Formule de Taylor-Lagrange: formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

$$\text{pour } n=0: f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

$\Leftrightarrow$ T A L pour $n=0$.

d'où

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Corollaire:

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et telle que $f^{(n)}$ est dérivable. Supposons de plus que:

$$\sup_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)| = M < +\infty$$

Fixons un point $x_0 \in I$, alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in I.$$

Exemple:

Approximation de la valeur de la fonction $\sin$ au point $0,01$.

Nous avons, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\sin$ au point 0 à l'ordre 3 , nous obtenons:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(c)}{4!} x^4, \quad x \in \mathbb{R}$$

Polynôme et reste de Taylor

Considérons une fonction f de classe $C^n(I)$ et f a en un point x_0

a) le polynôme suivant :

$$P_{n, x_0}(x) = P_n(x, x_0) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in I$$

S'appelle le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0 .

b) La fonction suivante :

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad x \in I$$

et appelle le reste de Taylor de f à l'ordre n au point x_0 .

exemple :

$$f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0, \quad P_2(x)?$$

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x_0}} x - \frac{1}{4(1+x)^{3/2}} x^2 \right) \quad x_0 = 0$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2$$

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x)$$

$$R_2(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} x^2$$

Critères de convexité

f est convexe sur I si et seulement si pour tout point $z \in I$, la fonction ϕ_z définie par :

$$\phi_z(x) = \frac{f(x) - f(z)}{x - z}, \quad x \in I \setminus \{z\} \text{ est croissante.}$$

Critère de la dérivée seconde :

f est convexe $\Leftrightarrow f'$ est croissante, $f'' \geq 0$ sur I .

Régularité des fonctions convexes :

- f est une fonction convexe alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I et pour tous réels $a < b$ intérieurs à I on a :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)$$

- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, elle est continue sur l'intérieur de I .

Formule de Taylor :

Proposition :

Un polynôme est entièrement déterminé par les valeurs de ses dérivées en un seul point.

Soit P le polynôme de degré n : $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, x \in \mathbb{R}$.

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \text{ pour tout } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$\text{d'où } P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{On : } P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k$$

$$\text{avec } b_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{d'où } P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

La formule de Leibniz :

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors leur produit fg est aussi n fois dérivable sur I , et on a la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

$$\text{où } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad 0! = 1, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Proposition :

L'ensemble $C^n(I)$, où $n \in \mathbb{N}$, muni de l'addition et de la multiplication habituelle des fonctions, est une algèbre.

Fonctions convexes :

Définition :

- On dit que f est convexe sur I , si pour tous points $x, y \in I$ et tout scalaire $\lambda \in [0, 1]$: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
 - On dit que f est concave sur I , si tout point $x, y \in I$ et tout scalaire $\lambda \in [0, 1]$: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
- On remarque que si $-f$ est convexe alors f est concave.

Inégalité de Jensen :

Une fonction f est convexe sur I si et seulement si pour tout point $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ et tout scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

On a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

où $n \geq 2$.