

Ex 1 : $f(x) = e^x \sin x$.

1) Montrons par récurrence que :

$$f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \sin(x + n\pi/4) \quad (P_n) \quad \forall n \geq 0$$

pour $n=0$ on a

$$f^{(0)}(x) = f(x) = 2^0 e^x \sin(x+0)$$

Vraie. Supposons que (P_n) est vraie d'ordre n et montrons (P_{n+1}) .

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = 2^{n/2} (e^x \sin(x + n\pi/4))' \\ &= 2^{n/2} [e^x \sin(x + n\pi/4) + e^x \cos(x + n\pi/4)] \\ &= 2^{n/2} e^x \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x + n\pi/4) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x + n\pi/4) \right] \\ &= 2^{n/2} e^x \sqrt{2} \left[\cos \pi/4 \sin(x + n\pi/4) + \sin \pi/4 \cos(x + n\pi/4) \right] \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \left[\sin(\pi/4 + x + n\pi/4) \right] \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \sin(x + (n+1)\pi/4) \end{aligned}$$

Donc (P_{n+1}) est vraie d'où le résultat.

2) Montrer que $\forall x > 0$ et $\forall n \geq 0$ (2)

$\exists c \in]0, x[$ tq:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k/2} \sin(k\pi/4)}{k!} + \frac{2^{\frac{n+1}{2}} e^c \sin(c + (n+1)\pi/4)}{(n+1)!}$$

on a f est de classe C^n sur $[0, x]$. (car $f \in C(\mathbb{R})$)
et $f^{(n+1)}$ existe sur $]0, x[$. La Formule de Taylor Lagrange implique $\exists c \in]0, x[$ tq:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \sin(c + (n+1)\pi/4) e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f^{(k)}(0) = 2^{k/2} e^0 \sin(x + k\pi/4) \Big|_{x=0}$$

$$f^{(k)}(0) = 2^{k/2} \sin(k\pi/4)$$

$$e^x \sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k/2} \sin(k\pi/4)}{k!} x^k + \frac{2^{\frac{n+1}{2}} e^c \sin(c + (n+1)\pi/4) x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) Montrer que il existe $M > 0$ tel que:

$$|e \sin(1) - u_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}$$

$$\text{avec } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k/2} \sin(k\pi/4)}{k!}$$

pour $n = 1$ $\exists c \in]0, 1[$ tel que:

$$e \sin(1) = \sum_{k=0}^n \frac{2^{k/2} \sin(k\pi/4)}{k!} + \frac{2^{\frac{n+1}{2}} e^c \sin(c + (n+1)\pi/4)}{(n+1)!}$$

Alors

$$|e \sin(1) - u_n| = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} e^c |\sin(c + (n+1)\pi/4)|}{(n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

on a:

$$|\sin(x)| \leq 1$$

$$\text{et donc } e^c < 1$$

$$e^c < e$$

Donc

$$|u_n - e \sin(1)| \leq \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!} e$$

D'autre part on a:

(Qn) $2^{n-1} \leq n!$ $\forall n \geq 1$
Par récurrence. $n=0$ égalité
supposons que (Qn) est vraie d'abord
n et montrons Qn+1.

$$\text{on a: } n! \geq 2^{n-1} \\ (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$$

$$\text{or } n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \\ \text{Donc } (n+1)! \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

$$\text{Donc } (Q_{n+1}) \text{ est vraie et } 2^{n+1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} \leq 2^2 n!$$

$$\text{et } 2^{\frac{n+1}{2}} \leq 2^{n+1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} \leq 2^2 n!$$

$$\text{Donc } |u_n - e \sin(1)| \leq \frac{2^2 n! e}{(n+1)!} = \frac{2e}{(n+1)}$$

$$\exists M > 0 \quad M = 4e \quad \text{t.q.}$$

$$|u_n - e \sin(1)| \leq \frac{M}{(n+1)}$$

4) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e \sin(1)$

$$\text{on a: } 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - e \sin(1)| \leq M \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - e \sin(1)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - e \sin(1)) = 0 \\ \text{Sont } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e \sin(1)$$

Exercice 2 : Calculer le D.L au voisinage de x_0 à l'ordre 4 :

(1) $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ pour $x_0 = 0$ $n = 3$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$\begin{array}{r} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ - 1 \\ \hline x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ - x \\ \hline x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ - x^2 \\ \hline \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 - \frac{x^2}{2} \\ \hline 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 \\ \hline 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 \\ \hline 0(x^3) \end{array}$
---	---

$$\boxed{\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}$$

ou bien:
$$\frac{e^x}{\cos x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + o(x^3)$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

② $f(n) = \ln(1 + \sqrt{x})$ $x_0 = 1$; $n = 3$

posons $X = x - x_0 = x - 1$
 $x \rightarrow 1$; $X \rightarrow 0$

A lors $x = X + 1$

$f(n) = f(x+1) = \ln(1 + \sqrt{1+X})$

Or $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{X^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{X^3}{3!} + o(X^3)$

Soit $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3 + o(X^3)$

Avec $u(x) = \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3 + o(X^3)$

$u(0) = 0$

$f(n) = f(x+1) = \ln(2 + u(x))$
 $= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{u(x)}{2}\right)$
 $= \ln(2) + \left[\frac{u(x)}{2} - \left(\frac{u(x)}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{u(x)}{2}\right)^3 + o\left(\frac{u(x)}{2}\right)^3 \right]$

$u^2(x) = \frac{1}{4}X^2 \left[1 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}X^2 \right] + o(X^3)$

$= \frac{1}{4}X^2 \left[1 - 2 \cdot \frac{1}{4}X \right] + o(X^3)$

$u^2(x) = \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{8}X^3 + o(X^3)$

$u^3(x) = \left(\frac{X}{2}\right)^3 \left[1 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}X^2 \right] + o(X^3)$

$u^3(x) = \frac{X^3}{8} + o(X^3)$

(6)

$$\begin{aligned} f(x) = f(x+1) &= \ln(2) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 \right] \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{8} \frac{x^3}{8} + o(x^3) \right] \\ &= \ln(2) + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{64}x^3 \\ &\quad + \frac{1}{3 \times 64}x^3 + o(x^3) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{4}x + x^2 \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{32} \right) + x^3 \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{3 \cdot 64} \right) \\ &\quad + o(x^3) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^3) \\ \log(1+\sqrt{x}) &= \ln(2) + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2 + \frac{5}{96}(x-1)^3 \\ &\quad + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

Ex 3: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sin(x) - 1}{\cos x - 1}$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \cos x - 1 &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \sin x &= x + o(x^2) \end{aligned}$$

$$e^{\sin x} = e^{x + o(x^2)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sin x - 1}{\cos(x) - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} o(1) = 0$

Ex 4: $f(x) = \sqrt{1 + \log(1+x)}$

(7)

1) D.L. de f en 0 à l'ordre 2.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = \left(1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + u(x))^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{avec } u(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$u(0) = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{2} u(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{u^2(x)}{2!} + o(u^2(x)) \\ &= 1 + \frac{1}{2} u(x) - \frac{1}{8} u^2(x) + o(u^2(x)) \end{aligned}$$

$$\text{or } u^2(x) = x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(x) &= 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2} x + x^2 \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right] + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{3}{8} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{3}{8} x^2 + o(x^2)$$

2) Equation de la tangente à la courbe f au point $(0, 1)$ est:

$$y = 1 + \frac{1}{2} x$$

* position de la courbe par rapport à y

$$\text{on a: } f(x) - y = -\frac{3}{8} x^2 + o(x^2)$$

Alors $f(x) - y \underset{(0)}{\sim} -\frac{3}{8} x^2 < 0$

Donc la courbe est au dessous de la tangente