



Série de préparation : Analyse 3 (SMIA)

Exercice 1. Soit $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$.

- (1) Montrer que $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin(x + \frac{n\pi}{6})$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
- (2) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$e^{\sqrt{3}} \sin(1) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k \sin \frac{k\pi}{6}}{k!} + \frac{2^n e^{c\sqrt{3}} \sin(c + \frac{(n+1)\pi}{6})}{(n+1)!}.$$

- (3) Considérons $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k \sin(k\pi/6)}{k!}$.
 - Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que

$$|u_n - e^{\sqrt{3}} \sin(1)| \leq \frac{M}{n+1}.$$

- En déduire que la suite (u_n) converge vers $e^{\sqrt{3}} \sin(1)$.

Exercice 2. Calculer les développements limités d'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes

- (1) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$, où $x_0 = 0$ et $n = 3$.
- (2) $f(x) = e^{\cos(x)}$, où $x_0 = \frac{\pi}{2}$ et $n = 4$.

Exercice 3. Démontrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Exercice 4. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$$

Exercice 5. Soit $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

- (1) Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de f .
- (2) Déduire l'équation de la tangente au graphe $\mathcal{G}$ de la fonction f au point 0, ainsi la position de $\mathcal{G}$ par rapport à cette tangente.