

(1)

Ex 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}$$

$$\sqrt{1+x^3} = (1+x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x^3} - 1 = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

D.L. de $\sin(x - \sin x)$ à l'ordre 3.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = u(x) \quad (u(0)=0)$$

$$\sin(u(x)) = u(x) + o(u(x)) \quad \text{à l'ordre 3}$$

$$\sin(x - \sin x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)}$$

$$\frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{2}{3} + o(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{2}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(e^x - x)}$$

D.L. en $x \rightarrow 0$ e^x à l'ordre 2

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x - x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + u(x)$$

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad u(0)=0$$

$$\ln(1+u(x)) = u(x) + o(u(x)) \quad \text{à l'ordre 2}$$

$$\ln(e^x - x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(e^x - x)} = \sqrt{e}$$

$$e^{\frac{1}{n^2}} \ln(e^x - x) = e^{\frac{1}{n^2}} (u(x) + o(x^2)) \quad (2)$$

$$e^{\frac{1}{n^2}} \ln(e^x - x) = e^{\frac{1}{n^2}} \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n^2}} \ln(e^x - x) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} - x}{\ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})}$$

$x > 1$

posons:

$$x = x - 1$$

$x \rightarrow 1, x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{(x+1) \ln(x+1)} - x - 1}{\ln(1 + \sqrt{x^2 + 2x})}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(x+1) \ln(1+x) = (x+1) \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + o(x^2)$$

$$= x^2 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{2} + x^1 + o(x^2) = u(x)$$

$$u(0) = 0$$

$$e^{(x+1) \ln(1+x)} = e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{u^2(x)}{2} + o(u^2(x))$$

$$u^2(x) = \left(x + \frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\text{Donc } e^{(x+1) \ln(1+x)} = 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{(x+1) \ln(1+x)} - 1 - x = x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1 + \sqrt{x^2 + 2x}) = \sqrt{x^2 + 2x} + o(\sqrt{x^2 + 2x}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x+1)\ln(x+1)} - x - 1}{\ln(1 + \sqrt{x^2 + 2x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x^2 + 2x} + o(\sqrt{x^2 + 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + o(1))}{\sqrt{x} [\sqrt{x+2} + o(\sqrt{x+2})]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3/2} (1 + o(1))}{\sqrt{x+2} + o(\sqrt{x+2})} \end{aligned}$$

on peut raisonner par $\sim$ équivalence.

$$\text{on } e^{(x+1)\ln(1+x)} - x - 1 \underset{(0)}{\sim} x^2$$

$$\ln(1 + \sqrt{x(x+2)}) \underset{(0)}{\sim} \sqrt{x(x+2)} \underset{(0)}{\sim} \sqrt{2x}$$

$$\text{donc } \frac{e^{(x+1)\ln(1+x)} - x - 1}{\ln(1 + \sqrt{x(x+2)})} \underset{(0)}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{2x}} = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Ex3: $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{e^x - e^{-x} - 2x}$

DL de f au $\underset{(0)}{\sim} x \cos x = x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$2 - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$f(x) = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - 2x + o(x^3)}{2 - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} = -1 + o(1)$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = -1$$

$$g(n) = \left(\frac{\ln n - \ln(1+n)}{\ln(n)} \right)^{1/n}$$

$$= e^{\frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{\ln n} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(1+n)}{\ln n} = 0$$

$$\ln \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{\ln n} \right) = \frac{\ln(1+n)}{\ln n} + o \left(\frac{\ln(1+n)}{\ln n} \right)$$

$$\text{donc } e^{\frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{\ln(1+n)}{\ln n} \right)} = e^{\frac{1}{n} \frac{\ln(1+n)}{\ln n} + o \left(\frac{1}{n} \frac{\ln(1+n)}{\ln n} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} g(n) = \lim_{n \rightarrow 0} e^{\frac{1}{n} \frac{\ln(1+n)}{\ln n} + o \left(\frac{1}{n} \frac{\ln(1+n)}{\ln n} \right)} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(1+n)}{n} \cdot \frac{1}{\ln n} = 0$$

Ex 3: $f(n) = \frac{x^2}{e^n - 1 - n} \quad x \neq 0$

D.L de $n \rightarrow e^n$ l'ordre 4

$$e^n = 1 + n + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^n - 1 - n = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\text{soit } f(n) = \frac{x^2}{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + o(x^2)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + u(n))}$$

avec $u(n) = \frac{2}{3!}x + \frac{2}{4!}x^2 + o(x^2)$

$$f(x) = \frac{2}{1+u(x)} = 2(1 - u(x) + u^2(x) + o(u^2(x))) \quad (5)$$

$$u(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$$

$$u^2(x) = \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^2 \right) + \frac{1}{9}x^2 \right) + o(x^2)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{3}x + x^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12} \right) \right) + o(x^2)$$

$$f(x) = 2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{36}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = 2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + o(x^2)$$

~~$f(0) = 2$~~
L'équation de la tangente au point $(0, 2)$

a) est $y = 2 - \frac{2}{3}x$.

b) position par rapport à la tangente :

$$f(x) - y = \frac{1}{18}x^2 + o(x^2)$$

au voisinage de 0 $f(x) - y \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{18}x^2 > 0$

Donc la courbe de f est au dessus de la tangente

γ

Ex 4 $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$

(6)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$1 + e^x = 2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right)$$

$$\text{Soit } u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

$$u(0) = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2(1+u(x))} = \frac{1}{2} (1 - u(x) + u^2(x) - u^3(x) + o(u^3))$$

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right)^2 + o(x^3)$$

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} \left(1 + 2 \frac{x}{2} \right) + o(x^3)$$

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

$$u^3(x) = \frac{x^3}{2^3} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right)^3 + o(x^3)$$

$$u^3(x) = \frac{x^3}{2^3} + o(x^3)$$

$$u^3(x) = \frac{x^3}{2^3} + o(x^3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} \right) - \frac{x^3}{8} \right) + o(x^3)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + x^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + x^3 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \right) + o(x^3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

$$f(0) = \frac{1}{2}; f'(0) = -\frac{1}{4}$$

- * L'équation la tangente au point $M(0, \frac{1}{2})$
- * est $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$
- * position de la courbe de f par rapport à y est $f(x) - y = \frac{x^3}{48} + o(x^3)$

au voisinage de 0 on a. (7)

$$f(x) - y \underset{(0)}{\sim} \frac{x^3}{48}$$

Donc si $x > 0$

de la tangente y .

si $x < 0$

$$f(x) - y < 0$$

La courbe est au dessous de la tangente.

3) La nature du point $(0, \frac{1}{2}) = \gamma$
le point γ est un point d'inflexion.



Ex 5:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + x + 2) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ &= \ln(2) + \ln(1 + u(x)) \end{aligned}$$

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \quad u(0) = 0$$

Developpement limite de f en 0 à l'ordre 3

$$f(x) = \ln(2) + \left(u(x) - \frac{u^2(x)}{2} + \frac{u^3(x)}{3} + o(u^3(x)) \right)$$

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} (1 + x)^2 + o(x^3)$$

$$= \frac{x^2}{4} (1 + 2x) + o(x^3)$$

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$u^3(x) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 2) \quad (8)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)$$

D.L de f en 0 à l'ordre 2.

$$f(x) = \ln(2) + \ln(1 + u(x))$$

avec $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}$

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} (1 + x)^2 + o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{4} (1 + 2x) + o(x^2)$$

$$u^2(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + o(x^2)$$

Donc $f(x) = \ln(2) + (u(x) - u^2(x) + o(u^2(x)))$

$$= \ln(2) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)$$

$$= \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(0) = \ln(2) ; f'(0) = \frac{1}{2}$$

① l'équation de la tangente au pt $\Pi(0, \ln(2))$ est $y = \frac{x}{2} + \ln(2)$

② position par rapport à la tangente $C(f)$

$$f(x) - y = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

au voisinage de 0 $f(x) - y \geq \frac{x^2}{2} > 0$
la courbe de f est au dessus de la tangente y .