

Ex 1 : Asymptotes au voisinage de ∞ . (1)

a) $f(x) = (x^2 - 2)^{\frac{1}{3}} (x + 3)^{\frac{1}{3}}$

posons $x = \frac{1}{x}$ $x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} (1 - 2x^2)^{\frac{1}{3}} (1 + 3x)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{3}(2x^2) + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{1}{3}(3x) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{(3x)^2}{2!} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right) (1 + x - x^2 + o(x^2)) \\ &= \frac{1}{x} \left(1 + x - x^2 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x} + 1 - \frac{5}{3}x + o(x) \\ &= \frac{1}{x} + 1 - \frac{5}{3}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc $f(x) = x + 1 - \frac{5}{3}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe au voisinage de ∞ .

Comme $f(x) - (x + 1) = -\frac{5}{3}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{5}{3}\frac{1}{x}$

La courbe est au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et au dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} = |x| e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1+\frac{2}{x}} \quad (2)$

- au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\right) \\ &= \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2!} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{2}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$g(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ comme

$$g(x) - (x+2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Donc la courbe est au dessus de $y = x + 2$

* au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= - e^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= - \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= - \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= -1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

$$g(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le graphe de $C(f)$ de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = -x - 2$

$C(f)$ est au dessus de l'asymptote $y = -x - 2$

Exercice 2

(3)

(1) D.A. à l'ordre 3 au voisinage de ∞ .

$$\text{posons } x = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1-x}{x}$$

$$f(x) = f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \left(\frac{1-x}{x} - 1\right) e^x = \frac{1}{x} (1-2x) e^x$$

$$= \frac{1}{x} (1-2x) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(1 + x - 2x - 2x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

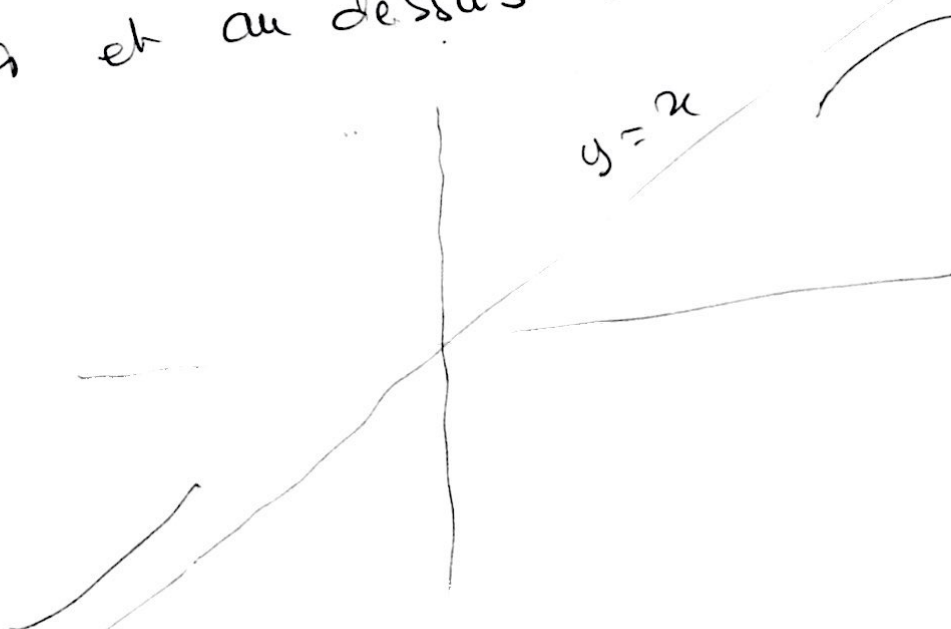
$$= \frac{1}{x} \left(1 - x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1}{x} - 1 - \frac{3}{2}x + o(x)$$

$$\text{Donc } f(x) = x+1 - 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) + o\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Le graphe de f admet pour asymptote la droite
 $y = x$ comme $f(x) - x \underset{\infty}{\sim} -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{3}{2x}$

Donc la courbe $C(f)$ est au dessous au voisinage
de $+\infty$ et au dessus au voisinage de $-\infty$



$$e^{\frac{1}{x(1+x_n)}} \quad \sum x_{n+1}$$

ou bien

(4)

$$x = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{x}$$

$$e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{\frac{1}{x}+1}} = e^{\frac{x}{1+x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} &= x(1 - x + x^2 + o(x^2)) \\ &= x - x^2 + x^3 + o(x^3) = u(x) \end{aligned}$$

$$e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{u^2(x)}{2} + o(u^2(x))$$

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{1+x}} &= 1 + (x - x^2 + o(x^2)) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(1-x)e^{\frac{x}{1+x}} = (1-x) \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right) + o(x^2)$$

$$= 1 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= 1 + \frac{3x}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$g(n) = n + \frac{3}{2}n + o(n)$$

Donc $y = n$ est asymptote de la courbe α
de f . $C(b)$ est au dessus au voisinage de $+\infty$
et au dessous au voisinage de $-\infty$

Ex 3 : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$ (5)

(1) D.A. à l'ordre 3 de $\sqrt{1 + 1/x}$ au voisinage de $+\infty$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2!} + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\right) \left(\frac{\frac{1}{2}-2}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Donc $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

(2) D.A. de f à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$

on a $f(x) = x + |x| \sqrt{1 + 1/x}$

au voisinage de $+\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{16x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

au voisinage de $-\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 - \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} - \frac{1}{16x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(3) • au voisinage de $+\infty$ l'asymptote au graphique C(b) de f est $y = 2x + \frac{1}{2}$

• au voisinage de $-\infty$ l'asymptote au graphique C(b) de f est $y = -\frac{1}{2}$

combe au dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$

Ex 4 : D.L généralisée de $\cos(\frac{1}{2n})$ en + à l'ordre 3

$$(1) \cos(\frac{1}{2n}) = 1 - \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \frac{1}{2!} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (6)$$

$$\boxed{\cos \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{8} n^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$(2) \sqrt{2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{D.G à l'ordre 3}$$

$$= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}{2!} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^3}{3!} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{4n} - \frac{1}{32} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{272} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4n} - \frac{\sqrt{2}}{32} \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{2}}{128} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$(3) \text{ D.L.G. de } f(n) = \frac{\cos(\frac{1}{2n})}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{8} n^2}{1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{32} n^2 - \frac{1}{128} \frac{1}{n^3}}$$

$$\frac{-\frac{1}{4n} + \frac{1}{n^2} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right) - \frac{1}{128} \frac{1}{n^3}}{+\frac{1}{4n} + \frac{1}{16} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4 \times 32} n^3}$$

$$\frac{0 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{32}\right) + \frac{1}{n^3} \left(-\frac{2}{128}\right)}{+\frac{1}{32} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{32 \times 4}\right)}$$

$$\frac{0 + \frac{1}{n^3} \left(-\frac{1}{128}\right)}{}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{4n} - \frac{1}{32} n^2 + \frac{1}{128} \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{32} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{128} \frac{1}{n^3}}$$

$$\text{Donc } \boxed{f(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos(\frac{1}{2n})}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{32} n^2 + \frac{1}{128} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}$$

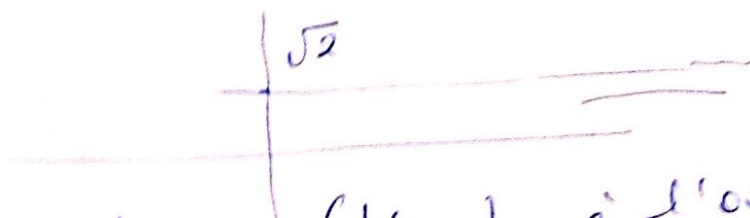
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}x} - \frac{1}{32\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{128\sqrt{2}}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

(7)

Le graphe de f admet pour asymptote la droite $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -\frac{1}{4\sqrt{2}x}$$

La courbe est au dessous de l'asymptote.



Ex 5: D.G. de $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ à l'ordre 3

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$(1) \quad \sin \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{48} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$(2) \quad \sqrt{1 + \frac{1}{2}x} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{128} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$(3) \quad \text{D.G. de } f(x) = \frac{x \sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{48} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{128} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

En faisant la division euclidienne.

$$\begin{array}{r}
 1 - \frac{1}{24} \frac{1}{x^2} \\
 - 1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{32} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{128} \frac{1}{x^3} \\
 \hline
 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{24} \right) - \frac{1}{128} \frac{1}{x^3} \\
 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{16} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4 \times 32} \frac{1}{x^3} \\
 \hline
 0 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{24} + \frac{1}{16} \right) - \frac{1}{x^3} \left(\frac{1}{128} + \frac{1}{4 \times 32} \right) \\
 \quad \quad \quad \frac{5}{96} \quad \quad \quad \frac{2}{128} \\
 - \frac{5}{96} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \frac{5}{96 \times 4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{128} \frac{1}{x^3} \\
 1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{96} \frac{1}{x^2} - \frac{11}{384} \frac{1}{x^3}
 \end{array}$$

(8)

$$\begin{aligned}
 &= 0 - \frac{1}{x^3} \left(\frac{2}{128} + \frac{5}{96 \times 4} \right) \\
 &= -\frac{1}{x^3} \frac{3 \times 2 + 5}{96 \times 4} \\
 &= -\frac{1}{x^3} \frac{11}{384}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{24} x^2 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{128} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} = 1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{96} \frac{1}{x^2} - \frac{11}{384} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

D'où $f(x) = \frac{x \sin \frac{1}{2}x}{\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{5}{96} \frac{1}{x^2} - \frac{11}{384} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right)$

D'où $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{5}{192} \frac{1}{x^2} - \frac{11}{768} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

(9) Ex 5 : ou bien :

$$\sin\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2n}\right)^3 \frac{1}{3!} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{48} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{4n} - \frac{1}{32} n^{-2} + \frac{1}{2^7} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{4n} - \frac{1}{32} n^{-2} + \frac{1}{128} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

D.2 a' l'ordre 3

$$f(n) = \frac{n \sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n}}} = \frac{n \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{48} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{1 + u(n)}$$

$$u(n) = \frac{1}{4n} - \frac{1}{32} n^{-2} + \frac{1}{128} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$u^2(n) = \frac{1}{16n^2} - 2 \cdot \frac{1}{4n} \cdot \left(\frac{1}{32} n^{-2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$u^2(n) = \frac{1}{16n^2} - \frac{1}{2 \times 32} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$u^3(n) = \frac{1}{4^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{32} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{128} n^{-3}\right) + \frac{1}{16n^2} - \frac{1}{64} n^{-3} - \frac{1}{4^3} n^{-3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{n^3} \left[-\frac{1}{128} - \frac{1}{64} - \frac{1}{4^3}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{4n} + \frac{3}{32} \frac{1}{n^2} - \frac{5}{128} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48} \frac{1}{x^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{32} \frac{1}{x^2} - \frac{5}{128} \frac{1}{x^3} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{3}{64}x^2 - \frac{5}{128x^2} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{48}x^2 + \frac{1}{48x^4} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{x^2} \left(\frac{3}{64} - \frac{1}{48} \right) + \frac{1}{x^3} \left[-\frac{5}{128x^2} + \frac{1}{48x^4} \right] + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{5}{192} \frac{1}{x^2} + \frac{11}{768} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$