Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

Printemps 2020

Corrigé: Séance 6- Analyse 3 (SMIA)

Exercice 1. (1) *Soit f une fonction qui admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre 1 ($f(x) = a_0 + a_1x + x\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0).*

a. *Montrer que si on pose $f(0) = a_0$, alors f est continue en 0.*

b. *Montrer, de plus, que f est dérivable en 0.*

(2) *Les fonctions suivantes admettent-elles des développements limités d'ordre 1 au voisinage de 0 ?*

$$f(x) = \ln(x), \qquad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{et} \qquad h(x) = \sin\left(\sqrt{|x|}\right).$$

(3) *Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, est continue en 0, admet un DL à l'ordre 2 et que f n'est pas deux fois dérivable en 0.*

Solution. (1) *a.* La fonction f admet un DL à l'ordre 1 au voisinage de 0. Par définition, il existe deux constantes $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = a_0 + a_1x + x\varepsilon(x)$, pour chaque x au voisinage de 0, où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Ce qui donne $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} a_0 + a_1x + x\varepsilon(x) = a_0$. D'où, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Donc f est continue en 0. On dit ici que : "f est prolongéable par continuité en 0".

Remarque : Si une fonction f admet un DL à l'ordre $n \geq 0$ au voisinage de 0 (noté V) de partie polynomiale $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, et si $0 \notin V$, le prolongement par continuité de f à $V \cup \{0\}$ (obtenu en posant $f(0) = a_0$) admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 de même partie polynomiale.

b. On a aussi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{a_1x + x\varepsilon(x)}{x} = \lim_{x\to 0} a_1 + \varepsilon(x) = a_1.$$

Alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Remarque : Pour qu'une fonction f, continue en 0, admette un DL d'ordre 1 au voisinage 0, il faut et il suffit que $f'(0)$ existe. En cas d'existence, la partie polynomiale de ce DL est $f(0) + f'(0)x$. En revanche l'existence d'un DL à l'ordre $n \geq 2$ au voisinage de 0, n'implique nullement que $f"(0)$ existe. C'est l'objectif de la question (3).

(2) D'abord, On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Donc f n'est pas prolongéable par continuité en 0. D'après la question $(1-a.)$ f n'admet pas de DL à l'ordre 1 au voisinage 0.

De même, comme la fonction *sinus* n'admet pas de limite en $+\infty$, en faisant le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, alors la fonction g n'admet pas de limite en 0. En particulier g n'est pas prolongéable par continuité en 0. D'après $(1-a.)$ g n'admet pas de DL à l'ordre

1 au voisinage de 0.

La fonction h est continue en 0 et n'est pas dérivable en 0, car on a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \times (+\infty) = +\infty.$$

D'après $(1-b.)$ h n'admet pas de DL à l'ordre 1 au voisinage de 0.

(3) (i) On a $|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^*$. On fait tendre x vers 0, on obtient $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on peut écrire que $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)$ au voisinage de 0. Donc $f(x) = x^2(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)) = o(x^2)$ au voisinage de 0. Alors f admet un DL au voisinage de 0 à l'ordre 2. En outre, par l'unicité de DL, on déduit que la partie polynomiale d'ordre 2 au voisinage de 0 du DL de f est le polynôme nul.

(ii) Tout d'abord la fonction f est continuité en 0, car $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) = f(0)$. On a

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

et pour chaque $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'où

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette expression n'admet pas de limite en 0 donc f' n'est pas dérivable en 0. Ce qui veut dire que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Remarque : Ce n'est pas parce que f admet un DL à l'ordre 2 que f est 2 fois dérivable en 0.

□

Exercice 2. *Calculer les développements limités d'ordre n au voisinage de 0 des fonctions suivantes:*

(a) $f(x) = \cos(x^2) + \sin(x)$, $n = 5$.

(b) $f(x) = \log(1+x^3)$, $n = 9$.

(c) $f(x) = \sqrt{1+x}\ e^{2x}$, $n = 3$.

(d) $f(x) = \sqrt{4+x^2}$, $n = 6$.

Solution. (a) On écrit

$$\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + o\left(X^3\right),$$

(l'ordre 3 suffira). On effectue le changement de variable $X = x^2$. Or, quand x tend vers 0, X tend aussi vers 0. Alors, on obtient

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^6\right) (= 1 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^5\right)),$$

et on écrit

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

On en déduit, en effectuant la somme, que

$$\cos(x^2) + \sin(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

(b) On écrit

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o\left(X^3\right).$$

On pose $X = x^3$. Comme $o\left(x^6\right) = o\left(X^3\right)$, il suffit de développer la fonction $\ln(1+X)$ à l'ordre 3. On obtient alors

$$\ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + o\left(x^9\right).$$

(c) On écrit

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + o\left(X^3\right).$$

Pour $X = 2x$, on a

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o\left(x^3\right),$$

et

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right).$$

On effectue le produit en tranquant à l'ordre 3, on obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}e^{2x} &= 1 + \left(2x + \frac{1}{2}x\right) + \left(2x^2 + x^2 - \frac{1}{8}x^2\right) + \left(\frac{4}{3}x^3 + x^3 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{16}x^3\right) + o\left(x^3\right)\\ &= 1 + \frac{5}{2}x + \frac{23}{8}x^2 + \frac{103}{48}x^3 + o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

(d) On a $\sqrt{4+x^2} = 2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$. On pose $X = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. On a

$$\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3 + o\left(X^3\right).$$

Comme x tend vers 0 quand X tend vers 0, on obtient

$$\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + o\left(x^6\right)$$

D'où

$$\sqrt{4+x^2} = 2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{512} + o\left(x^6\right)$$

□

Exercice 3. *Déterminer le développement limité à l'ordre n, au voisinage de x_0, des fonctions suivantes:*

(a) $f(x) = \cos x$, $n = 5$ *et* $x_0 = \pi/3$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$ *et* $x_0 = 4$.

Solution. (a) On pose $h = x - \frac{\pi}{3}$. Par une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\cos\left(h+\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos h - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin h \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\frac{h^6}{6!}+o\left(h^6\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}+o\left(h^5\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{1}{4}h^2+\frac{\sqrt{3}}{12}h^3+\frac{1}{48}h^4-\frac{\sqrt{3}}{240}h^5+o\left(h^5\right)
\end{aligned}$$

Revenant à x, on obtient

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+ \\
&+ \frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4-\frac{\sqrt{3}}{240}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5\right)
\end{aligned}$$

(b) On pose $h = x - 4$, d'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{4+h} &= 2\sqrt{1+\frac{h}{4}} \\
&= 2\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{h}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{h}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{h}{4}\right)^3+o\left(h^3\right)\right) \\
&= 2+\frac{h}{4}-\frac{h^2}{64}+\frac{h^3}{512}+o\left(h^3\right).
\end{aligned}$$

Revenant à x, on obtient

$$\sqrt{x} = 2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(x-4)^3}{512}+o\left((x-4)^3\right).$$

$\square$