

EXERCICE 8

(a) soit $f(x) = e^x$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc f est en particulier n fois dérivable sur $[0, x]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]0, x[$.

D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n+1)}(c) (x-0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = e^x \text{ donc } f^{(k)}(0) = 1$$

$$\text{Ainsi : } e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Or } x > 0 \text{ alors } \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} > 0 \text{ donc } \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$\text{c-à-d : } e^x > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

(b) soit $f(x) = \ln(1+x)$

f est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty [$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}, \quad f''(x) = -1 \cdot (x+1)^{-2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -6(x+1)^{-4} = \frac{-6}{(x+1)^4}$$

donc : $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$ et $f^{(4)}(0) = -6$.

soit $x > 0$

f est 3 fois dérivable sur $[0, x]$, 4 fois dérivable sur $]0, x[$,

Alors D'après la formule de Taylor-Lagrange

$$\exists c \in]0, x[\quad / \quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!} x^4$$

donc $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} f^{(4)}(c)$.

$$f^{(4)}(c) = \frac{-6}{(c+1)^4}$$

On a : $0 < c < x \Rightarrow 1 < c+1 < x+1 \Rightarrow 1 < (c+1)^4 < (x+1)^4$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^4} < \frac{1}{(c+1)^4} < 1$$

$$\Rightarrow -6 < \frac{-6}{(c+1)^4} < \frac{-6}{(x+1)^4} < 0$$

$$\Rightarrow -6 < f^{(4)}(c) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{x^4}{4} < \frac{x^4}{24} f^{(4)}(c) < 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} f^{(4)}(c) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(C) soit $f(z) = \sqrt{1+z}$

f est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$, donc en particulier, si $x > 0$ Alors f est 2 fois dérivable sur $[0, x]$ et 3 fois dérivable sur $]0, x[$.

D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a :

$$\exists c \in]0, x[\mid f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3.$$

$$f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = (1+x)^{1/2}, f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} = \frac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}$$

Donc,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \times 4} + \frac{3}{8\sqrt{(1+c)^5}} \frac{x^3}{6}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16\sqrt{(1+c)^5}}$$

$$0 < c < x \Rightarrow 1 < (1+c)^5 < (1+x)^5 \Rightarrow 1 < \sqrt{(1+c)^5} < \sqrt{(1+x)^5}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}} < \frac{1}{(1+c)^5} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{x^3}{16\sqrt{(1+c)^5}} < \frac{x^3}{16}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16\sqrt{(1+c)^5}} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$



(3)

EXERCICE 9 :

posons $h(x) = \sqrt{1+x}$. L'application h est de classe C^3 sur $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Donc d'après la formule de Taylor-Lagrange.

$$\forall x \in I, \exists \theta_x \in]0, 1[, \quad h(x) = h(0) + x h'(0) + \frac{x^2}{2} h''(0) + \frac{x^3}{6} h'''(\theta_x)$$

D'où

$$\forall x \in I, \exists \theta_x \in]0, 1[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16} \frac{x^3}{\sqrt{(1+\theta_x)^5}}$$

Ainsi :

$$\left| \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \right) \right| = \left| \frac{1}{16} \frac{x^3}{\sqrt{(1+\theta_x)^5}} \right| \leq \frac{1}{2} |x^3|$$

puisque :

$$\left| \frac{1}{16} \frac{1}{\sqrt{(1+\theta_x)^5}} \right| \leq \frac{1}{2}$$