

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse 3

Auteur : **Mohamed HOUIMDI**

Version février 2016

Réalisé par :



Table des matières

1 Rappels et résultats préliminaires	4
1.1 Extremums d'une fonction dérivable	4
1.4 Théorème de Rolle - Formule des accroissements finis	6
1.8 Comparaison locale des fonctions - Notations de Landau	8
1.8.1 Fonction dominée par une autre fonction	9
1.9.1 Fonction négligeable devant une autre fonction	9
1.10.1 Notation de Landau	10
1.11.1 Fonctions équivalentes	11
2 Formules de Taylor - Développements limités	13
2.1 Formules de Taylor	13
2.1.1 Formule de Taylor-Lagrange	13
2.2.1 Formule de Taylor-Maclaurin	15
2.5.1 Formule de Taylor-Young	17
2.6.1 Formule de Taylor avec reste intégral	18
2.8 Développements limités	19
2.8.1 Définition et propriétés élémentaires	19
2.10.1 Opération sur les développements limités	22
2.10.1.1 Somme et multiplication par un scalaire	22
2.11.0.1 Produit de deux développements limités	22
2.12.0.1 Quotient de deux développements limités	24
2.14.0.1 Développement limité d'une fonction composée	27
2.15.0.1 Développement limité obtenu à partir de celui d'une dérivée	28
2.16.1 Utilisation des développements limités	30
2.16.1.1 Recherche d'équivalent simple - Calcul de limites	30
2.17.0.1 Caractérisation d'extremums	32
2.18.0.1 Position d'une courbe par rapport à une tangente	33
2.19.1 Développements limités généralisés	34
2.19.1.1 Développements limités généralisés au voisinage d'un point de \mathbb{R}	34

2.20.0.1	Développents limités généralisés au voisinage de l'infini	35
2.21.0.1	Recherche d'asymptotes obliques	37
3 Fonctions convexes		40
3.0.1	Définition de la convexité	40
3.1.1	Continuité et dérivabilité des fonctions convexes	41
3.4.1	Caractérisation de la convexité	43
3.6.1	Extremums d'une fonction convexe	45
3.9.1	Quelques inégalités de convexité	46
3.9.1.1	Inégalité de la tangente	46
3.10.0.1	Inégalité de Jensen	47
3.11.0.1	Inégalité de Hölder	48
3.12.0.1	Inégalité de Minkowski	49
4 Courbes paramétriques et polaires		51
4.1	Courbes paramétriques	51
4.1.1	Le plan affine \mathbb{R}^2	51
4.1.2	Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^2	52
4.1.2.1	Définition et exemples	52
4.2.0.1	Limite et continuité	53
4.4.0.1	Dérivabilité	55
4.5.0.1	Formule de Taylor-Young	55
4.6.0.1	Développements limités	56
4.7.0.1	Tangente à une courbe paramétrique	57
4.8.0.1	Position d'une courbe par rapport à sa tangente	59
4.8.0.2	Branches infinies	60
4.9.1	Plan d'étude d'une courbe paramétrique	61
4.9.1.1	Domaine de définition	61
4.9.1.2	Réduction du domaine de définition	61
4.9.1.3	Points double	64
4.10.0.1	Tableau de variation	64
4.11	Courbes en coordonnées polaires	73
4.11.1	Coordonnées polaires	73
4.11.2	Courbes d'équation pôlaire $r = f(\theta)$	74
4.11.2.1	Définition et exemples	74
4.12.0.1	Plan d'étude d'une courbe pôlaire	74
Appendices		83

Rappels et résultats préliminaires

1.1 Extremums d'une fonction dérivable

Définition 1.2.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

i) On dit que x_0 est un minimum local de f sur I , s'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq I \text{ et } \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x_0) \leq f(x)$$

ii) On dit que x_0 est un maximum local de f sur I , s'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq I \text{ et } \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x_0) \geq f(x)$$

iii) On dit que x_0 est un extremum local de f sur I , si x_0 est un minimum local de f ou si x_0 est un maximum local de f sur I .

Remarques

1. Si $\forall x \in I$, $f(x_0) \leq f(x)$, on dit que x_0 est un minimum global de f sur I .
2. Si $\forall x \in I$, $f(x_0) \geq f(x)$, on dit que x_0 est un maximum global de f sur I .
3. Si x_0 est un minimum global de f ou si x_0 est un maximum global de f , on dit que x_0 est un extremum global de f .
4. Si x_0 est un extremum global de f , alors x_0 est un extremum local de f , tandis que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemples

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$. Le tableau de variation de cette fonction est défini par :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$

On voit donc que $x_0 = 1$ est un minimum local de f sur \mathbb{R} , mais 1 n'est pas un minimum global de f sur \mathbb{R} . Par ailleurs, 1 est un minimum global de f sur $[1, +\infty]$.

Theorème 1.3.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On suppose que

- i) f est dérivable au point x_0 ,
- ii) x_0 est un extremum local de f sur I .

Alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve

f est dérivable au point x_0 , donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe}$$

par suite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existent}$$

et on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Or, x_0 est un extremum local de f , donc on peut supposer, par exemple, que x_0 est un minimum local, donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq I \text{ et } \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x_0) \leq f(x)$$

Donc, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0]$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, par suite, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

On a aussi, pour tout $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, par suite, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

On en déduit donc que $f'(x_0) = 0$.

Remarques

1. La condition $f'(x_0) = 0$ est une condition nécessaire pour que f possède un extremum local au point x_0 . Cette condition est en général n'est pas suffisante pour que f possède un

extremum local au point x_0 .

Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3$, alors on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local de f .

2. Le théorème précédent concerne seulement les fonctions dérivables.

Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ possède un minimum local au point 0 sans être dérivable au point 0.

1.4 Théorème de Rolle - Formule des accroissements finis

Théorème 1.5 (Théorème de Rolle).

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = 0$.

Preuve

Soient $m = \inf_{x \in I} f(x)$ et $M = \sup_{x \in I} f(x)$, où $I = [a, b]$, alors deux cas sont possibles :

Si $m = M$, alors f est constante, donc $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$.

Si $m \neq M$, alors ou bien $f(a) \neq m$ ou $f(a) \neq M$, donc on peut supposer, par exemple, que $f(a) \neq m$.

Comme f est continue sur $[a, b]$, alors d'après le théorème du maximum, il existe $c \in]a, b[$, tel que $f(c) = m$. Donc c est un minimum local de f , par suite, d'après le théorème précédent, $f'(c) = 0$.

Remarques

1. Le c du théorème précédent, peut ne pas être unique. Par exemple, si on considère la fonction f définie par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 1$, alors f est continue sur l'intervalle $[-3, 5]$, dérivable sur $]-3, 5[$ et on a $f(-3) = f(5) = 136$, donc d'après Rolle, il existe $c \in]-3, 5[$, tel que $f'(c) = 0$. On vérifie que $c = \pm 1$.
2. La continuité de la fonction f aux bornes de l'intervalle $[a, b]$ est nécessaire. Par exemple, si on considère la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x - [x]$, alors on aura $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ on voit donc que f est continue partout sur $[0, 1]$ sauf en 1, que f est dérivable sur $]0, 1[$ et on a $\forall x \in]0, 1[, f'(x) = 1$ et que $f(0) = f(1)$. Cependant il n'existe aucun $c \in]0, 1[$, tel que $f'(c) = 0$.
3. La dérivabilité de la fonction f sur $]a, b[$ est nécessaire. Par exemple, si on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = |x|$, alors f est continue sur $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1) = 1$, f est dérivable sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$, cependant il n'existe aucun $c \in]-1, 1[$, tel que $f'(c) = 0$.
4. La fonction f doit-être à valeurs réelles. Par exemple, si on considère la fonction définie sur

$[0, 1]$ par $f(x) = e^{2ix}$, alors f est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, avec $f'(x) = 2i\pi e^{2ix}$ et on a $f(0) = f(1)$, par contre, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $f'(x) \neq 0$.

Exercice (Quelques extensions du théorème de Rolle)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$, tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} , telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $f'(c) = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} , telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $f'(c) = 0$.

Solution

1. Soit $g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} f(a + \tan x) & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ f(a) & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Comme $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$, alors, on a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = f(a) = g(\frac{\pi}{2})$, par suite g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a $g(0) = g(\frac{\pi}{2})$. On voit aussi que g est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que $g'(x) = (1 + \tan^2 x)f'(a + \tan x)$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tel que $g'(d) = 0$. Il suffit donc de prendre $c = a + \tan d$, alors $c \in]a, +\infty[$, car $\tan d > 0$ et $f'(c) = 0$, car $1 + \tan^2 d \neq 0$.
2. Soit $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ l & \text{si } x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \end{cases}$. Alors on a $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} = l$, donc la fonction g est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avec $g'(x) = (1 + \tan^2 x)f'(\tan x)$, et $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tel que $g'(d) = 0$. Il suffit donc de prendre $c = \tan d$.
3. On suppose, par exemple, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et on considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(\arctan x)$. Alors on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = f(\frac{\pi}{2})$, avec $f(\frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R}$, donc d'après la question précédente, il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.6 (Théorème des accroissements finis).

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Preuve

On considère la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

Alors il est clair que g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et on a

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De plus, on a

$$g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$, tel que $g'(c) = 0$. On en déduit donc que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 1.7 (Inégalité des accroissements finis).

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

On suppose qu'il existe deux réels m et M , tel que $\forall x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$. Alors on a

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Preuve

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$, tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Comme $m \leq f'(c) \leq M$, alors on aura

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

1.8 Comparaison locale des fonctions - Notations de Landau

Rappelons d'abord que si $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a tout intervalle ouvert sous la forme $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$. On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle ouvert sous la forme $]A, +\infty[$ et on appelle voisinage de $-\infty$, tout intervalle ouvert sous la forme $]-\infty, -A[$, avec $A > 0$.

Enfin, rappelons aussi que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Ainsi, lorsque on dit qu'une fonction f est définie au voisinage de a , cela signifie que qu'il existe

un voisinage V de a , tel que f soit définie sur V , sauf peut-être au point a .

1.8.1 Fonction dominée par une autre fonction

Définition 1.9.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a , avec $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

On dit que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a , s'il existe une fonction b définie et bornée dans un voisinage de a , telle que $f(x) = b(x)g(x)$ dans un voisinage de a .

Remarques

- Si f est dominée par g au voisinage de a , alors il existe $M > 0$ et il existe un voisinage V de a , tel que

$$\forall x \in V, |f(x)| \leq M|g(x)|$$

- Si g est non nulle au voisinage de a , alors f est dominée par g , si et seulement si, la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de a .
- Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est dominée par $(v_n)_{n \geq 0}$, s'il existe une suite bornée $(b_n)_{n \geq 0}$, telle que à partir d'un certain rang n_0 , on a $\forall n \geq n_0, u_n = b_n v_n$. Si de plus $(v_n)_{n \geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est dominée par $(v_n)_{n \geq 0}$, si et seulement si, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée.

1.9.1 Fonction négligeable devant une autre fonction

Définition 1.10.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a , avec $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a , s'il existe une fonction α définie au voisinage de a , telle que

- i) $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.
- ii) $f(x) = \alpha(x)g(x)$ dans un voisinage de a .

Remarque

- Si g ne s'annule pas au voisinage de a , alors $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$, si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \geq 0}$, s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, telle que
 - i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$,

ii) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n = o_n v_n$.

Si de plus $(v_n)_{n \geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \geq 0}$, si et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

1.10.1 Notation de Landau

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a , avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a , on écrit $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de a ou encore $f(x) = O_a(g(x))$ et on dit que $f(x)$ est un **grand O** de $g(x)$ au voisinage de a .

Si $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a , on écrit $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a ou encore $f(x) = o_a(g(x))$ et on dit que $f(x)$ est un **petit o** de $g(x)$ au voisinage de a .

Remarques

1. $f(x) = O_a(1) \iff f$ est bornée au voisinage de a .
2. $f(x) = o_a(1) \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
3. Si $f(x) = o_a(g(x))$ alors $f(x) = O_a(1)$.
4. Si g est non nulle sur un voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, avec $l \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = O_a(g(x))$.
5. Si g est non nulle sur un voisinage de a , alors on a
 - i) $f(x) = o_a(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
 - ii) $f(x) = O_a(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a .

Exemples

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha > \beta \implies x^\alpha = o(x^\beta)$ au voisinage de 0.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0 \implies |\ln x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ au voisinage de 0.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta \implies x^\alpha = o(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$.
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, (\alpha > 0 \text{ et } \beta > 0) \implies (\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition 1.11.

Opérations sur les **petits o**]

- i) $(f(x) = o_a(g(x)) \text{ et } g(x) = o_a(h(x))) \implies f(x) = o_a(h(x))$.
- ii) $(f(x) = o_a(g(x))) \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, f = o_a(\lambda g(x))$.
- iii) $(f_1 = o_a(g) \text{ et } f_2(x) = o_a(g)) \implies \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = o_a(g)$
- iv) $(f_1(x) = o_a(g_1(x)) \text{ et } f_2(x) = o_a(g_2(x))) \implies f_1(x) f_2(x) = o_a(g_1(x) g_2(x))$.

Preuve

Exercice

Remarque

Nous avons vu que si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = o(g(x))$$

Autrement dit, pour toute fonction g définie au voisinage de a , on a

$$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 o(g(x)) + \lambda_2 o(g(x)) = o(g(x))$$

On a aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $o(\lambda g(x)) = o(g(x))$.

1.11.1 Fonctions équivalentes

Définition 1.12.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a , avec $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a , et en écrit $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a ou $f(x) \sim_a g(x)$, s'il existe une fonction h définie au voisinage de a , telle que

- i)** $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$.
- ii)** $f(x) = h(x)g(x)$ au voisinage de a .

Remarques

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a , alors $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a , si et seulement si, $f(x) - g(x) = o(g(x))$ au voisinage de a .
3. Si $f(x) = o_a(g(x))$, alors $(f(x) + g(x)) \sim_a g(x)$
4. Si g ne s'annule pas au voisinage de a et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, avec $l \neq 0$, alors $f(x) \sim_l g(x)$ au voisinage de a .
5. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, avec $l \neq 0$, alors $f(x) \sim l$ au voisinage de a .
6. Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont équivalentes, s'il existe une suite $(w_n)_{n \geq 0}$, telle que
 - i)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$,
 - ii)** Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n = w_n v_n$.

Si de plus $(v_n)_{n \geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont équivalentes, si et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Proposition 1.13.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a , avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- i) Si $f(x) \sim_a g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
- ii) Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de a .

Preuve

- i) Soit h une fonction définie au voisinage de a , tel que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$, et soit V un voisinage de a , tel que $\forall x \in V, f(x) = h(x)g(x)$.

$$\text{Donc on a } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (hg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l.$$

- ii) Supposons, par exemple, que g est positive au voisinage de a , donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[, g(x) \geq 0$$

Soit h une fonction définie au voisinage de a , tel que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$, et soit V un voisinage de a , tel que $\forall x \in V, f(x) = h(x)g(x)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$, alors il existe $\beta > 0$, tel que

$$\forall x \in V, |x - a| \leq \beta \implies |h(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$$

Soit $\varepsilon = \min(\alpha, \beta)$, alors pour $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, on aura $g(x) \geq 0$ et $\frac{1}{2} \leq h(x) \leq \frac{3}{2}$.

Donc $\frac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3g(x)}{2}$, par suite $\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[, f(x) \geq 0$.

Exemples

Soit u une fonction définie au voisinage de 0, telle que $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$

1. $\ln(1 + u(x)) \sim_0 u(x)$ et $(e^{u(x)} - 1) \sim_0 u(x)$.
2. $\sin u(x) \sim_0 u(x)$, $\tan u(x) \sim_0 u(x)$, $\sinh u(x) \sim u(x)$ et $\tanh u(x) \sim u(x)$.
3. $\arcsin u(x) \sim_0 u(x)$ et $\arctan u(x) \sim_0 u(x)$.
4. $\cos u(x) \sim_0 1$, $\cos u(x) - 1 \sim_0 -\frac{u(x)^2}{2}$, et $\arccos u(x) - \frac{\pi}{2} \sim_0 -u(x)$.

Exercice

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions définies sur un voisinage de a et \mathcal{R} la relation définie sur \mathcal{F} , par

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall g \in \mathcal{F}, f \mathcal{R} g \iff f \sim_a g$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.