Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse 3

Auteur : **Mohamed HOUIMDI**

Version février 2016

Réalisé par :

Table des matières

Chapitre 1

Rappels et résultats préliminaires

1.1 Extremums d'une fonction dérivable

Définition 1.2.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

i) On dit que x_0 est un minimum local de f sur I, s'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subseteq I \text{ et } \forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, \ f(x_0) \leq f(x)$$

ii) On dit que x_0 est un maximum local de f sur I, s'il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subseteq I \text{ et } \forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, \ f(x_0) \geq f(x)$$

iii) On dit que x_0 est un extremum local de f sur I, si x_0 est un minimum local de f ou si x_0 est un maximum local de f sur I.

Remarques

1. Si $\forall x \in I, \ f(x_0) \leq f(x)$, on dit que x_0 est un minimum global de f sur I.
2. Si $\forall x \in I, \ f(x_0) \geq f(x)$, on dit que x_0 est un maximum global de f sur I.
3. Si x_0 est un minimum global de f ou si x_0 est un maximum global de f, on dit que x_0 est un extremum global de f.
4. Si x_0 est un extremum global de f, alors x_0 est un extremum local de f, tandis que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemples

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$. Le tableau de variation de cette fonction est défini par :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

On voit donc que $x_0 = 1$ est un minimum local de f sur $\mathbb{R}$, mais 1 n'est pas un minimum global de f sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, 1 est un minimum global de f sur $[1, +\infty]$.

Théorème 1.3.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On suppose que

i) f est dérivable au point x_0,

ii) x_0 est un extremum local de f sur I.

Alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve

f est dérivable au point x_0, donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existe}$$

par suite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existent}$$

et on a

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Or, x_0 est un extremum local de f, donc on peut supposer, par exemple, que x_0 est un minimum local, donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subseteq I \ \text{ et } \ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \ f(x_0) \leq f(x)$$

Donc, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0]$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, par suite, $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

On a aussi, pour tout $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, par suite, $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

On en déduit donc que $f'(x_0) = 0$.

Remarques

1. La condition $f'(x_0) = 0$ est une condition nécessaire pour que f possède un extremum local au point x_0. Cette condition est en général n'est pas suffisante pour que f possède un

extremum local au point x_0.

Par exemple, soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^3$, alors on a $f'(0)=0$, mais 0 n'est pas un extremum local de f.

2. Le théorème précédent concerne seulement les fonction dérivables.

   Par exemple, soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=|x|$ possède un minimum local au point 0 sans être dérivable au point 0.

1.4 Théorème de Rolle - Formule des accroissements finis

Théorème 1.5 (Théorème de Rolle)**.**

Soient a, b deux nombres réels, avec $a<b$, et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a)=f(b)$.
Alors il existe $c\in]a,b[$, tel que $f'(c)=0$.

Preuve

Soient $m=\inf_{x\in I}f(x)$ et $M=\sup_{x\in I}f(x)$, où $I=[a,b]$, alors deux cas sont possible :
Si $m=M$, alors f est constante, donc $\forall x\in]a,b[,\ f'(x)=0$.
Si $m\neq M$, alors ou bien $f(a)\neq m$ ou $f(a)\neq M$, donc on peut supposer, par exemple, que $f(a)\neq m$. Comme f est continue sur $[a,b]$, alors d'après le théorème du maximum, il existe $c\in]a,b[$, tel que $f(c)=m$. Donc c est un minimum local de f, par suite, d'après le théorème précédent, $f'(c)=0$.

Remarques

1. Le c du théorème précédent, peut ne pas être unique. Par exemple, si on considère la fonction f définie par $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+1$, alors f est continue sur l'intervalle $[-3,5]$, dérivable sur $]-3,5[$ et on a $f(-3)=f(5)=136$, donc d'après Rolle, il existe $c\in]-3,5[$, tel que $f'(c)=0$. On vérifie que $c=\pm1$.

2. La continuité de la fonction f aux bornes de l'intervalle $[a,b]$ est nécessaire. Par exemple, si on considère la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=x-[x]$, alors on aura $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$, on voit donc que f est continue partout sur $[0,1]$ sauf en 1, que f est dérivable sur $]0,1[$ et on a $\forall x\in]0,1[,\ f'(x)=1$ et que $f(0)=f(1)$. Cependant il n'existe aucun $c\in]0,1[$, tel que $f'(c)=0$.

3. La dérivabilité de la fonction f sur $]a,b[$ est nécessaire. Par exemple,si on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par $f(x)=|x|$, alors f est continue sur $[-1,1]$, $t(-1)=f(1)=1$, f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$, cependant il n'existe aucun $c\in]-1,1[$, tel que $f'(c)=0$.

4. La fonction f doit-être à valeurs réelles. Par exemple, si on considère la fonction définie sur

$[0,1]$ par $f(x) = e^{2i\pi x}$, alors f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, avec $f'x) = 2i\pi e^{2i\pi x}$ et on a $f(0) = f(1)$, par contre, pour tout $x \in]0,1[$, on a $f'(x) \neq 0$.

Exercice (Quelques extensions du théorème de Rolle)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$, tel que $f'(c) = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $f'(c) = 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $f'(c) = 0$.

Solution

1. Soit $g : [0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} f(a+\tan x) & \text{si } x \in [0,\frac{\pi}{2}[\\ f(a) & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

   Comme $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, alors, on a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = f(a) = g(\frac{\pi}{2})$, par suite g est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et on a $g(0) = g(\frac{\pi}{2})$. On voit aussi que g est dérivable sur $]a,+\infty[$ et que $g'(x) = (1+\tan^2 x)f'(a+\tan x)$. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]0,\frac{\pi}{2}[$, tel que $g'(d) = 0$. Il suffit donc de prendre $c = a+\tan d$, alors $c \in]a,+\infty[$, car $\tan d > 0$ et $f'(c) = 0$, car $1+\tan^2 d \neq 0$.

2. Soit $g : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ l & \text{si } x \in \{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$.

   Alors on a $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} = l$, donc la fonction g est continue sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, avec $g'(x) = (1+\tan^2 x)f'(\tan x))$, et $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, tel que $g'(d) = 0$.
   Il suffit donc de prendre $c = \tan d$.

3. On suppose, par exemple, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(\arctan x)$.
   Alors on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = f(\frac{\pi}{2})$, avec $f(\frac{\pi}{2}) \in \mathbb{R}$, donc d'après la question précédente, il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.6 (Théorème des accroissements finis).

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$, tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Preuve
On considère la fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x$$

Alors il est clair que g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on a

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

De plus, on a

$$g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b]$, tel que $g'(c) = 0$. On en déduit donc que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Corollaire 1.7 (Inégalité des accroissements finis)**.**

Soient a, b deux nombres réels, avec $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
On suppose qu'il existe deux réels m et M, tel que $\forall x \in]a,b]$, $m \leq f'(x) \leq M$. Alors on a

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Preuve
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$, tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Comme $m \leq f'(c) \leq M$, alors on aura

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M$$

1.8 Comparaison locale des fonctions - Notations de Landau

Rappelons d'abord que si $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a tout intervalle ouvert sous la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$. On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle ouvert sous la forme $]A, +\infty[$ et on appelle voisinage de $-\infty$, tout intervalle ouvert sous la forme $]-\infty, -A[$, avec $A > 0$.
Enfin, rappelons aussi que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Ainsi, lorsque on it qu'une fonction f est définie au voisinage de a, cela signifie que qu'il existe

un voisinage V de a, tel que f soit définie sur V, sauf peut-être au point a.

1.8.1 Fonction dominée par une autre fonction

Définition 1.9.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a, s'il existe une fonction b définie et bornée dans un voisinage de a, telle que $f(x) = b(x)g(x)$ dans un voisinage de a.

Remarques

1. Si f est dominée par g au voisinage de a, alors il existe $M > 0$ et il existe un voisinage V de a, tel que
$$\forall x \in V, \ |f(x)| \leq M|g(x)|$$
2. Si g est non nulle au voisinage de a, alors f est dominée par g, si et seulement si, la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée dans un voisinage de a.
3. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est dominée par $(v_n)_{n\geq 0}$, s'il existe une suite bornée $(b_n)_{n\geq 0}$, telle que à partir d'un certain rang n_0, on a $\forall n \geq n_0, \ u_n = b_n v_n$.
Si de plus $(v_n)_{n\geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est dominée par $(v_n)_{n\geq 0}$, si et seulement si, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée.

1.9.1 Fonction négligeable devant une autre fonction

Définition 1.10.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a, s'il existe une fonction α définie au voisinage de a, telle que

i) $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

ii) $f(x) = \alpha(x)g(x)$ dans un voisinage de a.

Remarque

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
2. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\geq 0}$, s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, telle que

   i) $\lim\limits_{n\to +\infty} \alpha_n = 0$,

ii) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n = \alpha_n v_n$.

Si de plus $(v_n)_{n\geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\geq 0}$, si et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

1.10.1 Notation de Landau

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a, on écrit $f(x) = \mathrm{O}(g(x))$ au voisinage de a ou encore $f(x) = \mathrm{O}_a(g(x))$ et on dit que $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ au voisinage de a.
Si $f(x)$ est dominée par $g(x)$ au voisinage de a, on écrit $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ au voisinage de a ou encore $f(x) = \mathrm{o}_a(g(x))$ et on dit que $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ au voisinage de a.

Remarques

1. $f(x) = \mathrm{O}_a(1) \Longleftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a.
2. $f(x) = \mathrm{o}_a(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
3. Si $f(x) = \mathrm{o}_a(g(x))$ alors $f(x) = \mathrm{O}_a(1)$.
4. Si g est non nulle sur un voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, avec $l \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = \mathrm{O}_a(g(x))$.
5. Si g est non nulle sur un voisinage de a, alors on a

   i) $f(x) = \mathrm{o}_a(g(x)) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   ii) $f(x) = \mathrm{O}_a(g(x)) \Longleftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a.

Exemples

1. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall\beta \in \mathbb{R},\ \alpha > \beta \Longrightarrow x^\alpha = \mathrm{o}(x^\beta)$ au voisinage de 0.
2. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall\beta \in \mathbb{R},\ \beta > 0 \Longrightarrow |\ln x|^\alpha = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ au voisinage de 0.
3. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall\beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta \Longrightarrow x^\alpha = \mathrm{o}(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$.
4. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall\beta \in \mathbb{R},\ (\alpha > 0 \text{ et } \beta > 0) \Longrightarrow (\ln x)^\alpha = \mathrm{o}(x^\beta)$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition 1.11.

Opérations sur les petits o]

i) $(f(x) = \mathrm{o}_a(g(x)) \text{ et } g(x) = \mathrm{o}_a(h(x))) \Longrightarrow f(x) = \mathrm{o}_a(h(x))$.

ii) $(f(x) = \mathrm{o}_a(g(x))) \Longrightarrow \forall\lambda \in \mathbb{R}^*,\ f = \mathrm{o}_a(\lambda g(x))$.

iii) $(f_1 = \mathrm{o}_a(g) \text{ et } f_2(x) = \mathrm{o}_a(g)) \Longrightarrow \forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \mathrm{o}_a(g)$

iv) $(f_1(x) = \mathrm{o}_a(g_1(x)) \text{ et } f_2(x) = \mathrm{o}_a(g_2(x))) \Longrightarrow f_1(x) f_2(x) = \mathrm{o}_a(g_1(x) g_2(x))$.

Preuve
Exercice

Remarque

Nous avons vu que si $f_1(x) = \mathrm{o}(g(x))$ et $f_2(x) = \mathrm{o}(g(x)$, alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \mathrm{o}(g(x))$$

Autrement dit, pour toute fonction g définie au voisinage de a, on a

$$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \mathrm{o}(g(x)) + \lambda_2 \mathrm{o}(g(x)) = \mathrm{o}(g(x))$$

On a aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{o}(\lambda g(x)) = \mathrm{o}(g(x))$.

1.11.1 Fonctions équivalentes

Définition 1.12.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a, et en écrit $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a ou $f(x) \sim_a g(x)$, s'il existe une fonction h définie au voisinage de a, telle que

i) $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$.

ii) $f(x) = h(x)g(x)$ au voisinage de a.

Remarques

1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a, si et seulement si, $f(x) - g(x) = \mathrm{o}(g(x))$ au voisinage de a.
3. Si $f(x) = \mathrm{o}_a(g(x))$, alors $(f(x) + g(x)) \sim_a g(x)$
4. Si g ne s'annule pas au voisinage de a et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, avec $l \neq 0$, alors $f(x) \sim lg(x)$ au voisinage de a.
5. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, avec $l \neq 0$, alors $f(x) \sim l$ au voisinage de a.
6. Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont équivalentes, s'il existe une suite $(w_n)_{n \geq 0}$, telle que

   i) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$,

   ii) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n = w_n v_n$.

   Si de plus $(v_n)_{n \geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont équivalentes, si et seulement si, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Proposition 1.13.

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

i) Si $f(x) \sim_a g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

ii) Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de a.

Preuve

i) Soit h une fonction définie au voisinage de a, tel que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$, et soit V un voisinage de a, tel que $\forall x \in V,\ f(x) = h(x)g(x)$.

Donc on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (hg)(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

ii) Supposons, par exemple, que g est positive au voisinage de a, donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[,\ g(x) \geq 0$$

Soit h une fonction définie au voisinage de a, tel que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$, et soit V un voisinage de a, tel que $\forall x \in V,\ f(x) = h(x)g(x)$.

Comme $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$, alors il existe $\beta > 0$, tel que

$$\forall x \in V,\ |x - a| \leq \beta \Longrightarrow |h(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$$

Soit $\varepsilon = \min(\alpha, \beta)$, alors pour $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, on aura $g(x) \geq 0$ et $\frac{1}{2} \leq h(x) \leq \frac{3}{2}$.

Donc $\frac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3g(x)}{2}$, par suite $\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[,\ f(x) \geq 0$.

Exemples

Soit u une fonction définie au voisinage de 0, telle que $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$

1. $\ln(1 + u(x)) \sim_0 u(x)$ et $(e^{u(x)} - 1) \sim_0 u(x)$.
2. $\sin u(x) \sim_0 u(x)$, $\tan u(x) \sim_0 u(x)$, $\sinh u(x) \sim u(x)$ et $tanhu(x) \sim u(x)$.
3. $\arcsin u(x) \sim_0 u(x)$ et $arctanu(x) \sim_0 u(x)$.
4. $\cos u(x) \sim_0 1$, $\cos u(x) - 1 \sim_0 -\frac{u(x)^2}{2}$, et $\arccos u(x) - \frac{\pi}{2} \sim_0 -u(x)$.

Exercice

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur un voisinage de a et $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathcal{F}$, par

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall g \in \mathcal{F},\ f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f \sim_a g$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.