Cours d'analyse 3
(Séance 4)

Omar El-Fallah et Youssef Elmadani

Plan

- Formule de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Formule de Taylor-Young

Formule de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un point $c\in]a,b[$ tel que :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \tag{1}$$

La formule de Taylor :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

$$\varphi(x) = f(x) - A(x-a) - f(b)$$

On choisit A de sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$

c.a.d. $f(a) = f(b) - A(b-a)$

$$\Longleftrightarrow \quad A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

φ continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ avec $\varphi(a) = \varphi(b)$. Donc il existe $c \in]a,b[$ tq : $\varphi'(c) = 0$

Donc $f'(c) - A = 0$

$$f'(c) = A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration

On définit la fonction ϕ sur $[a,b]$ par

$$\phi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A.(b-x)^{n+1},$$

$= -\phi(b)$

où A est un réel tel que $\phi(a) = 0$. La fonction ϕ est dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\phi(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe donc un réel $c \in]a,b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. Or, pour tout $x \in]a,b[$, on a

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + A.(n+1)(b-x)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + A.(n+1)(b-x)^n \\
&= -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(\cancel{x}) + A.(n+1)(b-x)^n,
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b-x)^j}{j!} f^{(j+1)}(x)$$

donc puisque $\phi'(c) = 0$, cette dernière égalité appliquée à $x = c$ nous donne

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} = A.(n+1) \Longleftrightarrow A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

et le théorème est démontré.

$$-\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + A(n+1)(b-x)^n = \phi'(x)$$

$$\phi'(c) = 0 \iff$$

$$\frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) = A(n+1)(b-c)^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = A$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(b)$$

$$= f(b) + \frac{(b-x)}{1!} f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(b)$$

$$+ \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(b)$$

$$\phi(b) = 0$$

Exercice 1

Soit x un réel strictement positif et f une fonction sur $[0, x]$

1. Quelles sont les hypothèses qui permettent d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f sur $[0, x]$ à l'ordre 3 (c'est-à-dire un reste où intervient la dérivée troisième de f)? Ecrire cette formule.
2. On pose $f(t) = e^t$. Justifier la possibilité d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 3, et écrire cette formule.
3. On pose $f(t) = \ln(1 + t)$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 3.
4. On pose $f(t) = \cos(t)$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 3.

Correction exercice 1

1 Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, x]$ et $f^{(3)}$ existe sur $]0, x[$ on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3.
Il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(c)$$

$$\frac{f^{(3)}(c)}{3!} x^3$$

2 Soit $t \in [0, x]$, $f(t) = \cancel{\ln(1+t)}$ e^t. f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, x]$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre, en particulier à l'ordre 3. Or on a

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 1 \text{ et } f^{(3)}(t) = e^t$$

D'où

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} e^c$$

$0 < c < x$

C'est-à-dire

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} e^c \quad c \in]0, x[$$

Correction exercice 1

Soit $t \in [0, x]$, $f(t) = \ln(1+t)$.

3 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-1, +\infty[$ donc sur $[0, x]$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre, en particulier à l'ordre 3. D'où il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f^{(3)}(c)$$

Or on a :

$$f(0) = 0,\ f'(t) = \frac{1}{1+t} \Rightarrow f'(0) = 1,\ f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

et

$$f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$$

D'où

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \times \frac{2}{(1+c)^3} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

C'est-à-dire

$$\ln(1+t) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3} \qquad 0 < c < x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

$x > 0$

$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{x^3}{3}$$

Correction exercice 1

Soit $t \in [0, x]$, $f(t) = \cos(t)$.

4 f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, x]$. D'après la formule de Taylor-Lagrange il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(c)$$

Or on a :

$$f(0) = 1,\ f'(t) = -\sin(t) \Rightarrow f'(0) = 0,\ f''(t) = -\cos(t) \Rightarrow f''(0) = -1$$

et

$$f^{(3)}(t) = \sin(t)$$

D'où

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sin(c)$$

C'est-à-dire

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sin(c) \quad c \in]0, x[$$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} \sin(c)$ $\quad 0 < c < x$

$\Delta \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \ldots$

$\frac{\sin x - x}{x^3} \xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{6}$

Applications: Approximation d'une fonction par un polynôme

Corollaire [Inégalité de Taylor-Lagrange]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont fixés et telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$. Supposons de plus que

$$\sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)| = M < \infty.$$

Alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \in [a, b])$$

Démonstration :

Soit $x \in [a, b]$, comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$, elle l'est aussi sur $[a, x]$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$a < c < x \leq b$

D'où

$|f^{(n+1)}(c)| \leq M$

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \\
&= |f^{(n+1)}(c)| \times \frac{|x-a|^{(n+1)}}{(n+1)!} \\
&\leq \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \times \frac{|x-a|^{(n+1)}}{(n+1)!} \\
&= M \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \in [a, b])
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 de f entre 0 et 0.01
2. En déduire que $p = 0,01 - \frac{(0,01)^3}{6}$ est une valeur approché de $\sin(0,01)$ à 10^{-9} prés.

$$|\alpha - 0,12| \leq 10^{-3}$$

$$\alpha = 0,12***\ldots$$

Correction exercice 2

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit $t \in [0, x]$, $f(t) = \sin(t)$.

1. f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, x]$. D'après la formule de Taylor-Lagrange il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24}f^{(4)}(c)$$

Or on a

$$f(0) = 0,\ \ f'(0) = \cos(0) = 1\ f''(0) = -\sin(0) = 0\ f^{(3)}(0) = -1$$

et

$$f^{(4)}(t) = \sin(t)$$

D'où

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin(c)$$

Correction exercice 2

C'est-à-dire

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin(c) \quad c \in]0, x[$$

Par conséquent

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leq \frac{x^4}{24}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le cas particulier où $x = 0,01$, nous déduisons

$$\left|\sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{6}\right)\right| \leq \frac{10^{-8}}{24} < \frac{10^{-8}}{10} = 10^{-9}$$

Par conséquent

$$\left|\sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{6}\right)\right| \leq 10^{-9}.$$

On dit alors que la valeur $p = 0,01 - \dfrac{(0,01)^3}{6}$ est une valeur approché de $\sin(0,01)$ à 10^{-9} prés. Ainsi notre approximation p de $\sin(0,01)$ donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.

Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$$

$n=0$ $$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Démonstration

On effectue une récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Si $n = 0$, l'égalité ci-dessus devient $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(x)dx$, issue du théorème fondamental de l'analyse.

Hérédité : On suppose f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[a, b]$. On veut montrer que le résultat est encore vrai au rang $n + 1$, le supposant vrai au rang n, en procédant à une intégration par parties. On pose $u(x) = f^{(n+1)}(x)$ qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et

$$v'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \implies v(x) = -\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec v qui est alors aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx &= \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)dx \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)dx \end{aligned}$$

Cette dernière égalité achève notre récurrence.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\,dx$$

$$= \sum_0^n + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \text{———}$$

$(HR)_n$: si $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ alors

$$f(b) = P_n(f)(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx$$

$$P_n f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

L'ordre $(n+1)$: si $f \in C^{n+2}$ alors

$$f(b) = \sum_{0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\, dx$$

$$= \sum_{0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int$$

Formule de Taylor-Young

Théorème

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Alors, au voisinage de a,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x),$$

$\varepsilon(x-a)$

où ϵ est une fonction définie sur I vérifiant $\lim_{x \to a} \epsilon(\overset{a}{x}) = 0$

Démonstration Soit $a \in I$, comme I est ouvert, alors il existe $h, k > 0$ tels que $[a, a+h[\subset I$ et $]a-k, a] \subset I$. On ne raisonne que sur l'intervalle $[a, a+h[$, l'autre se traitant de manière absolument identique. Soit alors $x \in [a, a+h[$, qui nous permet d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[a, x] \subset [a, a+h[$, alors il existe $c_x \in]a, x[$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = \sum_{0}^{n} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$\varepsilon(x-a)$ $\quad a < c < x$

Suite de la démonstration

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n$$

Cette égalité est équivalente à

$$\frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) = \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)}{n!} := \epsilon(x)$$

En passant à la limite lorsque x tend vers a, le réel c_x tend vers a (car $c_x \in]a, x[$), et on a

$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = \lim_{c_x \to a} \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

Cette égalité a eu lieu car f est de classe $\mathcal{C}^n$, c'est-à-dire $f^{(n)}$ est continue en a (hypothèse du théorème). On en déduit alors que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = (x-a)^n \epsilon(x)$$

et le résultat est ainsi démontré.