Cours d'analyse 3 (Séance 3)

Omar El-Fallah et Youssef Elmadani

Plan

Régularité des fonctions convexes

Théorème

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I, et pour tous réels $a < b$ intérieurs à I on a

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b).$$

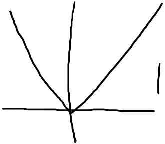
En particulier, les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes.

Corollaire

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, elle est continue sur l'intérieur de I.

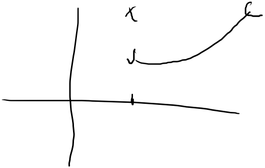
Aux extrémités de I, elle n'est pas forcément continue (donc a fortiori pas dérivable à droite ou à gauche) comme le montre l'exemple de la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 1$, qui est convexe.

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si f est dérivable en a $\Rightarrow$ $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$



Démonstration de Théorème

Si a est à l'intérieur de I, il existe des points $b, c \in Int(I)$ tels que $c < a < b$, et nous les fixons. Pour tous réels x, y vérifiant $c < x < a < y < b$, l'inégalité des pentes implique :

$$p_1 = \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leq \underbrace{\frac{f(a) - f(x)}{a - x}}_{\phi_a(x)} \leq \underbrace{\frac{f(y) - f(a)}{y - a}}_{\phi_d(y) = \phi_y(a)} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = p_2 \qquad (1)$$

et en posant $C = \max(|p_1|, |p_2|)$ on obtient $|f(z) - f(a)| \leq C|z - a|$ pour tout $z \in]c, b[$ ce qui prouve le corollaire.
De plus, pour tous réels x, x' vérifiant $c < x < x' < a < b$, on obtient de même :

$$p_-(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a) - f(x')}{a - x'} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donc la fonction $p_- :]c, a[\to \mathbb{R}$ est croissante et majorée, donc elle admet une limite $f'_g(a)$ au point a.

$$\lim_{x \to a^-} \phi_a(x) = f'_g(a) \leq \lim_{y \to a^+} \phi_a(y) = f'_d(a)$$

De même, pour tous réels y, y' vérifiant $c < a < y < y' < b$, on a

$$\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq \frac{f(y')-f(a)}{y'-a} = p_+(y')$$

donc la fonction $p_+ :]a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante et minorée, donc elle admet une limite $f'_d(a)$ au point a. Enfin, en faisant tendre x et y vers a dans les inégalités 1 on obtient

$$\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ce qui prouve le théorème en échangeant les rôles des points a, b et c.

$f(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc f est convexe

$f(x) = x^2 \quad , \quad f'(x) = 2x, \; f''(x) = 2 \geq 0$

donc f est convexe sur $\mathbb{R}$

$f(x) = x^\alpha \qquad (\alpha > 0 \;,\; x > 0$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1} \;,\; f''(x) = \alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha - 2}$

$\alpha \geq 1$ $\qquad$ f est convexe

$0 < \alpha \leq 1$ $\qquad$ f est concave

$0 < x \quad \ln(x) = f(x) \;,\; f'(x) = \frac{1}{x} \;,\; f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$\ln$ concave.

Formule de Taylor

Comme ce qui précède, nous désignons toujours par I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et par $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Nous désigne aussi par n un entier naturel.
Nous commençons d'abord par le cas simple d'une fonction polynôme.

Proposition

Un polynôme est entièrement déterminé par les valeurs de ses dérivées en un seul point.

Démonstration. Soit P le polynôme de degré n suivant

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence que

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \qquad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

2. Déduire que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad P' = a_1 + 2a_2 x$$

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = P'(0), \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2}$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = P'(0), \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2}, \quad a_3 = \frac{P'''(0)}{2 \cdot 3}$$

$$P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 x$$

$$a_4 = \frac{P^{(4)}(0)}{4!}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k$$

$$b_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad \sum_{0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$P(x) - \left(P(0) + \frac{P'(0)}{1!} x \right) = a_2 x^2$$

Polynôme et Reste de Taylor

Definition

Considérons une fonction f de la classe $\mathcal{C}^n(I)$ et fixons un point $x_0 \in I$.

(a) Le polynôme suivant

$$P_{n,x_0}(x) = P_n(x; x_0) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \qquad x \in I, \tag{2}$$

s'appelle *le polynôme de Taylor* de f à l'ordre n au point x_0.

(b) La fonction suivante

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \qquad x \in I, \tag{3}$$

est appelée *le reste de Taylor* de f à l'ordre n au point x_0.

$f(x) = e^x$ $\quad$ $P_2(x)$ en 0 $\quad (x_0 = 0)$

$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1 \quad , \quad f''(0) = 1$

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)$$

$$P_1(X) = 1 + x$$

en 0.

$f(x) = \sqrt{1+x}$ $\qquad P_2(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$\boxed{P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}$$

Formule de Taylor

Definition

Soit f une fonction de la classe $\mathcal{C}^n(I)$ et soit x_0 un point de I. *La formule de Taylor* de f à l'ordre n au point x_0 est la suivante

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \qquad x \in I, \tag{4}$$

où P_n et R_n sont respectivement le polynôme et le reste de Taylor.

Dans la suite, nous allons donner différentes expressions de la fonction reste de Taylor R_n.

Formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Lagrange est appelé aussi la formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$, elle nécessite moins de régularité (sur f).

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \tag{5}$$

$n=0$ $\quad f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$

$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

$\varphi(x) = f(x) - f(a) - A(x-a) \qquad A = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Démonstration

On définit la fonction ϕ sur $[a,b]$ par

$$\phi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A.(b-x)^{n+1},$$

où A est un réel tel que $\phi(a) = 0$. La fonction ϕ est dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\phi(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe donc un réel $c \in]a,b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. Or, pour tout $x \in]a,b[$, on a

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + A.(n+1)(b-x)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + A.(n+1)(b-x)^n \\
&= -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + A.(n+1)(b-x)^n,
\end{aligned}$$

donc puisque $\phi'(c) = 0$, cette dernière égalité appliquée à $x = c$ nous donne

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} = A.(n+1) \Longleftrightarrow A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

et le théorème est démontré.

Exemple.

Prenons l'exemple de la fonction exponentielle. Une simple application du Théorème à cette fonction au point 0 nous donne

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\exp c}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

où c est un point entre 0 et x.

Dans le but de savoir à quelle degré le polynôme P_n est proche de la fonction f au point x_0, nous avons besoin d'estimer le reste de Taylor. La formule de Taylor-Lagrange nous dit que pour estimer le reste de Taylor d'ordre n d'une fonction f au point x_0, il suffit de connaitre la dérivée $(n+1)^{ième}$ de f au voisinage de x_0. Le corollaire suivant nous donne un résultat de ce genre.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur I. Supposons de plus que

$$\sup_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)| = M < \infty.$$

Fixons un point $x_0 \in I$, alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \forall x \in I. \tag{6}$$

Approximation de la valeur de la fonction $\sin$ *au point* $0,01$.

Nous avons

$$\sin'(x) = \cos x, \qquad \sin''(x) = -\sin x, \qquad \sin^{(3)}(x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin^{(4)}(x) = \sin x.$$

Donc

$$\sin(0) = 0, \qquad \sin'(0) = 1, \qquad \sin''(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin^{(3)}(0) = -1.$$

Appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\sin$ au point 0 à l'ordre 3, nous obtenons

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(c)}{4!}x^4, \qquad x \in \mathbb{R},$$

pour un certain point c entre 0 et x. Par conséquent

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| \leq \frac{x^4}{4!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le cas particulier où $x = 0,01$, nous déduisons

$$\left|\sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{3!}\right)\right| \leq \frac{10^{-8}}{4!}.$$

Par conséquent

$$\left|\sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{3!}\right)\right| \leq 10^{-9}.$$

On dit alors que la valeur $p = 0,01 - \dfrac{(0,01)^3}{3!}$ est une valeur approché de $\sin(0,01)$ à 10^{-9} prés. Ainsi notre approximation p de $\sin(0,01)$ donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.