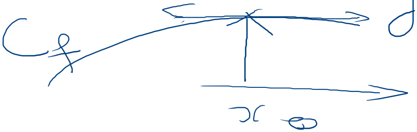
Cours d'analyse 3

Omar El-Fallah et Youssef Elmadani



$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$|f(x) - y| \le \varepsilon(x)$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$\varepsilon(x) \to 0, \quad x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c)$$

c entre x et x_0

$$f(x) - y = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

$$- \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right)$$

$$= \left(f'(c) - f'(x_0) \right)(x - x_0)$$

(si $|f'| \leq M$) $|f(x) - y| \leq 2M |x - x_0|$

$$|f'(c) - f'(x_0)| \leq |f'(c)| + |f'(x_0)|$$

$$\leq 2M$$

Plan

1. Formules de Taylor et applications
   - Les classes $\mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$.
   - Fonctions convexes

Introduction

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit I un intervalle ouvert contenant x_0. Considérons une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable au point x_0. Le graphe de f, noté $\mathcal{C}(f)$, admet donc une droite tangente au x_0, dont l'équation est un polynôme de degré 1. Nous voulons maintenant faire mieux, nous nous demandons alors : **Est-il possible d'approcher $\mathcal{C}(f)$ au voisinage de x_0 par un parabole, autrement dit par un graphe d'un polynôme de degré 2?**
La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor, permet en effet d'approximer une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme de degré assez grand que nous souhaitons.

Dérivées successives

Dans toute la suite, nous désignons par I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et par $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si tout simplement elle est continue sur I, dans ce cas nous écrivons $f \in \mathcal{C}^0(I)$. L'ensemble de toutes les fonctions réelles qui sont continue sur I est noté par $\mathcal{C}^0(I)$.

Les classes $\mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$.

On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I, dans ce cas nous écrivons $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Si de plus f' est dérivable sur I, on dit alors que f est deux fois dérivable sur I. La dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f et est souvent notée par f'' ou $f^{(2)}$. Plus généralement, pour $n \geqslant 2$, on dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable et que la $(n-1)^{ième}$ dérivée, notée par $f^{(n-1)}$, est aussi dérivable, nous avons

$$f' = f^{(1)}, \quad \left(f^{(1)}\right)' = f^{(2)}, \quad \cdots \quad , \left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}.$$

Définition

Soit n un entier naturel. La classe $C^n(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions n fois dérivable sur I et dont les $n^{ième}$ dérivées sont toutes continues sur I.

(a) Une fonction f de l'ensemble $C^n(I)$ est dite de classe C^n sur I.

(b) Si $f \in C^n(I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit alors que f est de classe C^∞ sur I. La classe $C^\infty(I)$ est donc c'est l'ensemble des fonctions admettant des dérivées supérieurs de tout ordre.

D'après cette définition, nous déduisons que,

$$C^0(I) \supset C^1(I) \supset \cdots \supset C^\infty(I), \quad \text{et que} \quad C^\infty(I) = \bigcap_{n \geq 0} C^n(I).$$

Exemples:

- Les polynômes sont de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.
- Les fonctions rationnelles sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition.
- La fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R})$.

d

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = P(x)$

$(x^n)' = n x^{n-1} \ldots (x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$

$\deg P = n \qquad P^{(k)} = 0 \quad (k > n)$ (si $n \geq 2$

$(e^x)' = e^x \qquad (e^x)^{(n)} = e^x \quad \forall n \geq 0$

$f^{(0)} = f$

$\sin x$, $\cos x$, ... st $C^\infty(\mathbb{R})$

$f(x) = \log x$ définit sur $]0, +\infty[$

$= \ln x$

$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

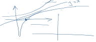
$e^{\ln x} = x \quad x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f \in C^2(]0, +\infty[)$

Ainsi de suite $f \in C^\infty(]0, +\infty[)$



$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \qquad x > 0$

$|f(x)| \leq |x^2|$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

f est dérivable

$\Big(\quad x \sin \frac{1}{x} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{1/x}$

$\frac{1}{x} = t$

$= \frac{\sin t}{t} \longrightarrow$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0

$2x \sin \frac{1}{x} \longrightarrow 0 \quad x \to 0$

Donc f' n'est pas continue en 0

$f' \notin C(\mathbb{R})$

$f' \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow{x \to \pi/2} +\infty$, $\xrightarrow[x \to -\frac{\pi}{2}]{} -\infty$

$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$(\text{Arctan}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$\text{Arctan} \in C^\infty(\mathbb{R})$

Opérations élémentaires sur les dérivées

Soit f et g deux fonctions réelles définie sur I, nous pouvons montrer facilement par récurrence la propriété suivante.

Propriété

Si f et g sont n fois dérivable sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$ et λf sont n fois dérivable sur I et

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

Nous déduisons alors que la classe $\mathcal{C}^n(I)$ est un espace vectoriel, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La formule de Leibniz

Théorème

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors leur produit fg est aussi n fois dérivable sur I, et on a la formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

où les nombres entiers $\binom{n}{i}$ sont les coefficients binômiaux:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

f, g deux fonctions dérivables en x_0,

alors fg est dérivable et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

f et g deux fois dérivables sur I

alors fg deux fois dérivables

$$(fg)'' = f''\cdot g + f'g' + f'g' + fg''$$

$$= f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + f\,g'' = f^{(2)}g^{(0)} + 2f^{(1)}g^{(1)} + f^{(0)}g^{(2)}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, b^k$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$0! = 1$$

Démonstration de la formule de Leibniz.

On considère l'hypothèse de récurrence suivante;

$\mathcal{H}_n$: Si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n sur I, alors le produit fg est dérivable à l'ordre n sur I et on a $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$.

L'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$, pour $n = 1$, provient du simple fait que le produit de deux fonctions dérivable est aussi dérivable et de plus

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

$$\sum_{i=0}^{1} C_1^i f^{(i)} g^{(n-i)} = C_1^0 \, f g' + C_1^1 \, f' g$$

$$= f g' + f' g = (fg)'$$

Fixons maintenant un entier naturel $n \geq 1$ et supposons que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. Soient f et g deux fonctions dérivables à l'ordre $n+1$ sur I. D'après notre supposition, f et g sont donc dérivables à l'ordre n sur I, ainsi que leur produit et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

Les fonctions f^i et g^{n-i} pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ sont dérivables (car f et g sont $n+1$ fois dérivables) donc $(fg)^{(n)}$ est dérivable. Par conséquent le produit fg est aussi $n+1$ fois dérivable. Nous rappelons la formule suivante, dite du triangle de Pascal,

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

$$C_n^{i-1} + C_n^{i} = \frac{n!}{(n-i+1)!\,(i-1)!} + \frac{n!}{(n-i)!\,i!}$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(f^{(i)} g^{(n-i)}\right)' \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f^{(i)} g^{(n+1-i)}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(\overset{k}{\widetilde{i+1}})} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)} \\
&= f^{(n+1)} + g^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right] f^{(i)} g^{(n+1-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)}.
\end{aligned}
$$

$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{i=} \cdots$

$f^{(n+1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(n+1)}$

Ceci entraine que l'hypothèse $\mathcal{H}_{n+1}$ est satisfaite. Ainsi, la formule de Leibniz est démontée.

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Nous terminons cette section par la proposition suivante

Proposition

L'ensemble $\mathcal{C}^n(I)$, où $n \in \mathbb{N}$, muni de l'addition et de la multiplication habituelle des fonctions, est une algèbre.

Exercice. Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I)$ est inversible dans l'algèbre $\mathcal{C}^n(I)$ si et seulement si elle ne s'annule pas sur I.