Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2020/21

SMIA-S2

M8 : Analyse 2

Série 2

Exercice 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1- $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}\,\mathrm{d}t$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Exercice 2. Étudier, suivant les valeurs de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la convergence des l'intégrales généralisées :

$$I = \int_1^2 \frac{(1+x)^{\beta} - x^{\beta} - 2^{\beta} + 1}{x^{\alpha}(x-1)} dx, \quad \text{et} \quad J = \int_2^{\infty} \frac{(1+x)^{\beta} - x^{\beta} - 2^{\beta} + 1}{x^{\alpha}(x-1)} dx$$

(**Indication :** pour J on pourra penser à un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ à un ordre convenable.)

Exercice 3.

1- Montrer qu'il existe une fonction $g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ continue, bornée et telle que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2(x)}{x} + \frac{\sin^3(x)}{x\sqrt{x}}\, g(x).$$

2- Étudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\mathrm{d}x$.

3- Déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 4. a- Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}}{x}\,\mathrm{dx}$.

b- Si cette intégrale est convergente, calculer sa valeur.

Exercice 5. Calcul des l'intégrales généralisées

$$I := \int_0^{\infty} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J := \int_0^{\infty} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que I et J convergent et que $I = J$.
2. Exprimer $\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$ en fonction de J.
3. En déduire I. Indication : on pourra passer par $I + J$.

EXERCICE FACULTATIF

Exercice 6. Calcul de l'intégrale généralisée $I := \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ converge et que $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\mathrm{d}x$ diverge.
2. Montrer que la fonction f définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} & \text{si} \quad x \in]0, \pi/2] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^1. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x.$$

Calculer J_0 et $J_{n+1} - J_n$, puis déduire la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire de ce qui précède la valeur de I.