

Ex 1 : Calcul des intégrales

$$A = \int_0^1 x (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) dx$$

La fonction $x \mapsto x (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})$ est continue sur $[0, 1]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle et on a :

$$A = \int_0^1 x (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) dx = \int_0^1 x (x^{1/3} + x^{1/4}) dx$$

$$= \int_0^1 (x^{4/3} + x^{5/4}) dx$$

$$= \left[\frac{3}{7} x^{7/3} + \frac{4}{9} x^{9/4} \right]_0^1$$

$$a = \frac{55}{63}$$

$$B = \int_1^4 \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ est continue sur $[1, 4]$, donc

cette fonction est intégrable sur cet intervalle.

Pour calculer B , on effectue une décomposition en éléments simples la fraction $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = F(x)$

Cherchons a, b et c tels que $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$

$$x F(x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(x+1) F(x) \Big|_{x=-1} = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$(x+2) F(x) \Big|_{x=-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Donc: $B = \int_1^4 \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2} \right) dx$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| \right]_1^4$$

$$B = \left[\ln \frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1} \right]_1^4$$

$$B = \ln \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} \right)$$

$C = \int_1^3 \frac{x^4}{x^{10}+1} dx$. Il est clair que la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{x^{10}+1}$ est intégrable sur $[1,3]$

On effectue un changement de variable $t = x^5$

on a $dt = 5x^4 dx$.

Donc $C = \frac{1}{5} \int_1^{243} \frac{dt}{t^2+1} dt = \left[\frac{1}{5} \arctan(t) \right]_1^{243}$

$$C = \frac{1}{5} \arctan(243) - \frac{\pi}{20}$$

$$D = \int_1^3 \frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2+1)} dx$$

on effectue une décomposition en éléments simples pour la fraction $\frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2+1)}$.

On remarque que:

$$\frac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{x^2(x^2+1)}$$

$$\text{On a, } \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1+x^2-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{x^4+x^3-x+1}{x^2(x^2+1)} &= 1 - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 1 - \frac{2}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Remarque : On peut décomposer $\frac{x^4+x^3-x+1}{x^2(x^2+1)}$

de cette manière :

Puisque $\deg(x^4+x^3-x+1) = 4$ et $\deg x^2(x^2+1) = 4$

$$\text{On a : } P(x) \frac{x^4+x^3-x+1}{x^2(x^2+1)} = 1 + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

calcul de a, b, c et d :

$$x^2 P(x) \Big|_{x=0} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$(x^2+1) P(x) \Big|_{x=i} = ci + d$$

$$\text{D'où : } c = 2 \text{ et } d = -2$$

$$\text{calcul de b : } P(1) = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{D'où : } D = \left[x - 2 \arctan(x) + \ln(x^2+1) - \ln|x| - \frac{1}{x} \right]_1^3$$

$$\text{Donc, } D = \frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} + \ln\left(\frac{5}{3}\right) - 2 \arctan(3)$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx. \quad \text{On remarque que!}$$

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0.$$

Donc E est bien définie.

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 = 2 \left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]$$

Posons $t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$, donc, $dx = \sqrt{2} dt$

$$\text{et } E = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi/2+1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2} dt}{\sqrt{t^2+1}} = \left[\text{Argsh}(t) \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi/2+1}{\sqrt{2}}}$$

Puisque $\text{Argsh}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$, alors

$$E = \left[\ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi+2}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \ln\left(\frac{\pi+2}{2\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2+4\pi+4}{8}}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2}}\right)$$

$$E = \ln\left(\sqrt{\pi^2+4\pi+12} + \pi+2\right) - \ln(2+2\sqrt{3})$$

$$F = \int_1^2 \frac{1}{\text{sh}(x) \cdot \text{ch}^3(x)} dx. \quad \text{Il est clair que } F \text{ existe}$$

on utilise l'extension de la règle de Bioche aux fonctions hyperboliques

Posons $w(x) = \frac{dx}{\text{sh}(x) \text{ch}^3(x)}$. Il est clair que $w(-x) = w(x)$,

donc, on peut effectuer le changement de variable:

$$t = \text{ch}(x). \quad \text{on a: } dt = \text{sh}(x) dx \text{ et}$$

$$\text{sh}^2(x) = t^2 - 1. \quad \text{ou } x \in [1, 2]$$

Donc,
$$F = \int_1^2 \frac{1}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}^3(x)} dx = \int_1^2 \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}^2(x) \operatorname{ch}^3(x)} dx$$

$$F = \int_{\operatorname{ch}(1)}^{\operatorname{ch}(2)} \frac{dt}{(t^2-1)t^3}$$

où $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$

Décomposition en éléments simples de $R(t) = \frac{1}{t^3(t^2-1)} = \frac{1}{t^3(t-1)(t+1)}$ ✓ ou

$$R(t) = \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \frac{b_1}{t-1} + \frac{b_2}{t+1}$$

• Calcul de a_3 : $t^3 R(t) \Big|_{t=0} = -1 \Rightarrow a_3 = -1$

• Calcul de b_1 : $(t-1)R(t) \Big|_{t=1} = \frac{1}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}$

• Calcul de b_2 : $(t+1)R(t) \Big|_{t=-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2}$

• Calcul de a_1 : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t R(t) = 0 \Rightarrow a_1 + b_1 + b_2 = 0$
 $\Rightarrow a_1 = -(b_1 + b_2) = -1$

On a $R(t) = \frac{-1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{-1}{t^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1}$

On $\begin{cases} R(2) = \frac{-1}{2} + \frac{a_2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ R(2) = \frac{1}{24} \end{cases}$

D'où: $a_2 = 0$ et par conséquent:

$$\frac{1}{t^3(t^2-1)} = \frac{-1}{t} + \frac{-1}{t^3} + \frac{1/2}{t-1} + \frac{1/2}{t+1}$$

Remarque: on peut déterminer les coefficients de la décomposition en éléments simples par la méthode suivante:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t^3(t^2-1)} &= \frac{1-t^2}{t^3(t^2-1)} + \frac{t^2}{t^3(t^2-1)} \\
 &= -\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t(t^2-1)} \\
 &= -\frac{1}{t^3} + \frac{1-t^2}{t(t^2-1)} + \frac{t^2}{t(t^2-1)} \\
 &= -\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{t}{t^2-1} \\
 &= -\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{t-1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2-1} \\
 &= -\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} \\
 &= -\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} \\
 &= -\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc, on a: } F &= \int_{ch(1)}^{ch(2)} \left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) \right] dt \\
 &= \left[-\ln|t| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \ln(t^2-1) \right]_{ch(1)}^{ch(2)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t^2} + \ln \left| \frac{t^2-1}{t^2} \right| \right]_{ch(1)}^{ch(2)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{ch^2(2)} + \ln \left| \frac{ch^2(2)-1}{ch^2(2)} \right| - \frac{1}{ch^2(1)} - \ln \left| \frac{ch^2(1)-1}{ch^2(1)} \right| \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln |th(x)| - \ln |th(1)| \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{ch(x)} - \frac{1}{ch(1)} \right]$$

$$= \ln \left| \frac{th(x)}{th(1)} \right| + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ch(x)} - \frac{1}{ch(1)} \right)$$

= ... (Continuer cette simplification)

$$* G = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a+b \cos(x)} dx, a > b > 0.$$

Il est clair que G existe.

on effectue le changement de variable: $t = \tan(\frac{x}{2})$.

on a: $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, et $x = 2 \arctan(t)$

Donc: $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. De plus: $\begin{cases} x=0 \\ x=\pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$

$$\text{D'où: } G = \int_0^1 \frac{1}{a+b \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{a(1+t^2) + b(1-t^2)} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{(a-b)t^2 + a+b} dt$$

$$= \frac{2}{a+b} \int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t\right)^2 + 1} dt$$

$$= \frac{2}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}{\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t\right)^2 + 1} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} \int_0^1 \frac{\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t\right)}{\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t\right)^2 + 1} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} \left[\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} t\right) \right]_0^1$$

$$G = \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$$

* Calcul de $H = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(2x) dx$

La fonction $x \mapsto \sin(x) \cos(2x)$ est continue sur $[0, \pi/2]$, donc H existe.

Posez $w(x) = \sin(x) \cos(2x) dx$.

on a $w(-x) = w(x)$. Donc, d'après les règles de Brioché, on peut effectuer le changement de

variable $t = \cos(x)$. on a $dt = -\sin(x) dx$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=\pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=0 \end{cases}$$

et puis, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 2t^2 - 1$

$$\text{D'où : } H = \int_0^1 (2t^2 - 1) dt = \left[\frac{2}{3} t^3 - t \right]_0^1$$

$$H = -\frac{1}{3}$$

Autre méthode : on applique la formule :

$$\cos(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(y-x)]$$

$$\text{Donc, } H = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin(x+2x) + \sin(x-2x)) dx$$

$$H = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin(3x) - \sin(x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) + \cos(x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left[0 - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right]$$

$$H = -\frac{1}{3}$$

Ex2 :

* Calcul de $I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ sur le domaine

$$D_I =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$$

on effectue le changement de variable : $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Donc, $t \geq 0$. On remarque que $t \neq 1$.

On a : $t^2 = \frac{x-1}{x+1}$. Ici entraîne :

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \text{ et } dx = \frac{4t dt}{(1-t^2)^2}$$

D'où:
$$I = 4 \int \frac{t^2}{(t^2-1)^2} dt$$

On effectue une intégration par parties:

$$\begin{cases} u = t \\ v' = \frac{4t}{(t^2-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{-2}{t^2-1} \end{cases}$$

Donc,
$$\begin{aligned} I &= \frac{-2t}{t^2-1} + 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt \\ &= \frac{-2t}{t^2-1} + 2 \times \int \frac{1}{2} \left(\frac{t+1 - (t-1)}{t^2-1} \right) dt \\ &= \frac{-2t}{t^2-1} + \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finalement:

$$I = \ln \left| (x+1) \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x \right| + (x+1) \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

* calcul de $J = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+2x}}$ sur le domaine

$$D_J =]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$$

on effectue le changement de variable:

$$t = x + \sqrt{x^2+2x}, \quad \text{donc, } t \neq 0 \text{ sur } D_J$$

$$\text{ona: } (t-x)^2 = x^2+2x \text{ et donc } x = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{t+1}$$

$$dx = \frac{1}{2} \frac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 + 2t}{(1+t)^2} dt.$$

$$\text{d'où: } J = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t+2}{(t+1)^2} dt$$

$$\text{On remarque que } \frac{t+2}{(1+t)^2} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}$$

$$\text{d'où } J = \frac{1}{2} \left[\ln |t+1| - \frac{1}{t+1} \right] + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln |x+1+\sqrt{x^2+2x}| - \frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x}} \right] + C$$

ou encore, puisque $x+1 - \sqrt{x^2+2x} \neq 0$,

$$J = \frac{1}{2} \left[\ln |x+1+\sqrt{x^2+2x}| - \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2 - (\sqrt{x^2+2x})^2} \right] + C$$

$$J = \frac{1}{2} \left[\ln |x+1+\sqrt{x^2+2x}| - x + \sqrt{x^2+2x} \right] + C'$$

$C' = C - \frac{1}{2}$
 $C' \in \mathbb{R}$

$$K = \int \frac{\sin(x)}{2 + \sin^2(x) + \cos(x)} dx.$$

Il est clair que K est bien définie.

D'après les règles de Bôcher, on peut effectuer

le changement de variable: $t = \cos(x)$.

$$\text{Donc, } dt = -\sin(x) dx$$

on a donc:
$$J = \int \frac{\sin(x)}{2 + \sin^2(x) + \cos(x)} dx$$

$$= \int \frac{\sin(x) dx}{3 - \cos^2(x) + \cos(x)}$$

$$= - \int \frac{dt}{3 - t^2 + t} = \int \frac{dt}{t^2 - t + 3}$$

on a: $t^2 - t + 3 = \left(t - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \left(t - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)$

De plus, il est clair que:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right), \quad \forall a \neq b$$

Donc, $J = \int \frac{1}{(t-a)(t-b)} dt = \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t-b} \right) dt$

on a: $a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ et $b = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

Autrement dit, $J = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{t-a}{t-b} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$$a-b = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \frac{1 - \sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

$$\frac{t-a}{t-b} = \frac{t - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}}{t - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}} = \frac{2t - 1 - \sqrt{13}}{2t - 1 + \sqrt{13}}$$

Finalement, $J = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2\cos(x) - 1 - \sqrt{13}}{2\cos(x) - 1 + \sqrt{13}} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Exercice 03: (Intégrales de Wallis) : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$

1- avec le changement de variable : $t = \frac{\pi}{2} - x$,

on montre que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$.

D'autre part, $I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \sin(x) dx.$$

Intégration par parties : $\begin{cases} u = \sin^n(x) \\ v' = \sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = n \cos(x) \cdot \sin^{n-1}(x) \\ v = -\cos(x). \end{cases}$

on a donc :

$$I_{n+1} = \left[-\cos(x) \sin^n(x) \right]_0^{\pi/2} + n \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^{n-1}(x) dx$$

$$= 0 + n \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \sin^{n-1}(x) dx$$

$$= n \left[\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x) dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) dx \right]$$

$$= n [I_{n-1} - I_{n+1}]$$

Par conséquent, on a :

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$$

• Écrivons I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p .

D'après la relation $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$, on a :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2}$$

$$= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot I_{2p-4}$$

$$= \dots = \frac{(2p-1)(2p-3) \dots \times 3}{2p(2p-2) \times \dots \times 4} I_2.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{2p(2p-1)(2p-2) \dots \times 3 \times 2}{2p \cdot (2p-2) \dots \times 2 \times 2} I_2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2p)!}{[2^{p-1} p!]^2} I_2 \\
&= \frac{(2p)!}{2^{p-1} (p!)^2} I_2
\end{aligned}$$

d'autre part : $I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x)) dx \right]$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{4}$$

d'où :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \cdot I_{2p-1} \\
&= \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdot I_{2p-3} \\
&= \dots \\
&= \frac{2p(2p-2)(2p-4) \dots \times 2}{(2p+1)(2p-1)(2p-3) \dots \times 3} I_1 \\
&= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} I_1
\end{aligned}$$

Maintenant, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$

Donc :

$$I_{2p+1} = \frac{2^p (p!)^2}{(2p+1)!}$$

14/8

2. Montrons que $I_{n+1} \leq I_n$.

Par x et $\pi/2$, on a : $0 \leq \sin(x) \leq 1$. Donc,

$$0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x), \quad \forall n \geq 1.$$

D'où $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

Donc $(I_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante, minorée (par 0),
alors elle converge. Soit l la limite.

$$\text{On a } \begin{cases} I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } I_n \cdot I_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} I_{n-2} I_{n-1},$$

$$\text{soit } (n+1) I_n I_{n+1} = (n-1) I_{n-2} I_{n-1}, \quad \forall n \geq 1$$

Par suite, la suite $((n+1) I_n \cdot I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une
suite constante. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(n+1) I_{n+1} \cdot I_n = 2 I_2 I_1 = \pi/2$$

$$\text{car : } I_{n+1} \cdot I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Par passage à la limite : $l^2 = 0$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente

vers 0, donc $\forall n \geq 1$ on a : $I_n > 0$

Par conséquent $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est bien défini

On a : $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ et $I_n > 0$

Donc : $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

Puisque $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$,

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

Donc : I_{n+1} est équivalent à I_n .

* On a $I_{n+1} \cdot I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}} \sim \frac{\pi}{2^n}$

et $I_{n+1} \sim I_n$, donc ; $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2^n}$

et donc $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2^n}}$

Formule de Wallis : Puisque $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2^n}}$, alors

$$I_{2p} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

D'autre part, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$

Donc, $\frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \sqrt{\pi} \sim \frac{1}{\sqrt{p}}$

Autrement dit :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)! \sqrt{p}}$$

Maintenant, $I_{2p+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2p+1)}}$

$$\text{et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} \cdot \text{Donc, } \sqrt{\frac{\pi}{2(2p+1)}} \sim \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

ce qui entraîne:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)! (2p+1)} \sqrt{2(2p+1)}$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(2^p (1 \times 2 \times \dots \times p))^2}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2p} \sqrt{\frac{2}{2p+1}}$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(2 \times 4 \times \dots \times 2p)^2}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2p} \sqrt{\frac{2}{2p+1}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2p}{3 \times 5 \times \dots \times (2p-1)} \cdot \sqrt{\frac{2}{2p+1}}$$

Exercice 4: Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & -3 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{7-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calculons $\int_{-3}^1 f(x) dx$.

Il est clair que f est continue sur $[-3, 1]$, donc elle est intégrable sur cet intervalle, et on a:

$$I = \int_{-3}^1 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$= I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{-3}^0 (-x-1) dx = - \left[\frac{1}{2} x^2 + x \right]_{-3}^0 = \frac{3}{2}$$

Calculons $I_2 = \int_0^1 f(x) dx$.

Parceci, on effectue un changement de variable:

$t = \arcsin(x)$, donc, $x = \sin(t)$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right. \text{ implique } \left\{ \begin{array}{l} t=0 \\ t=\pi/2 \end{array} \right.$$

De plus; $dx = \cos(t) \cdot dt$

$$\text{D'où : } I_2 = - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cdot \cos(t) dt$$

$$= - \int_0^{\pi/2} |\cos(t)| \cos(t) dt = - \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt$$

$$= - \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= - \frac{1}{2} \left[\pi/2 + \frac{1}{2} \sin(\pi) - 0 \right]$$

$$= - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc : } I = I_1 + I_2$$

$$\text{Cas } \int_{-3}^1 f(x) dx = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$$

ie

$$\int_{-3}^1 f(x) dx = \frac{6-\pi}{4}$$

#

18/18