

Corrige' de l'examen.

Ex1 $A = \int_0^{\pi/4} \frac{3\cos x - \cos x \sin x}{2\cos^2 x + 3\sin x} dx = \int R(\cos x, \sin x) dx$ I

Si on pose $\theta(x) = \frac{3\cos x - \cos x \sin x}{2\cos^2 x + 3\sin x} dx$ alors on a: $\theta(\pi-x) = \theta(x)$

on peut appliquer une règle de Binoche et poser $u = \sin x$

d'où $du = \cos x dx$
 on obtient $A = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{(3-u)}{2(1-u^2)+3u} du = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{3-u}{-2u^2+3u+2} du$
 $= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{3-u}{(u-2)(u-\frac{1}{2})} du$

on décompose $\frac{3-u}{(u-2)(u-\frac{1}{2})} = \frac{2/3}{u-2} + \frac{-5/3}{u-\frac{1}{2}}$

d'où $A = \left[\frac{2}{3} \ln|u-2| - \frac{5}{3} \ln|u-\frac{1}{2}| \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \dots$

Ex2 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$ pour $x \in]0,1[$.

1. on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \cdot \sqrt{1-x} = 0$
 car $\frac{\ln x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -1$ et $\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.

Par conséquent $\int_{1/2}^1 f(x) dx$ faiblement généralisée en 1. Elle converge.

2. Pour $\int_0^{1/2} f(x) dx$, on étudie f au voisinage de 0.

or $\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} \sim_0 \ln x$ donc elle est de même nature que $\int_0^{1/2} \ln x dx$. or cette dernière converge car

Ex3 $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n u \, du.$

+ Montrons que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{on a } I_n + I_{n+1} &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x (\tan^2 x + 1) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x (\tan x)' \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2n+1} \tan^{2n+1} x \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

et on déduit que $I_2 = \frac{1}{3} - I_1$ avec $I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx$

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx = \left(\tan x - x \right)_0^{\pi/4} = \frac{1 - \pi/4}{1}$$

donc $I_2 = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$

Ex4 Résoudre $y'' - 2y' + y = x e^{-x}$ selon les valeurs de m .

l'équation homogène s'écrit : $y'' - 2y' + y = 0$

l'équation caractéristique correspondante est $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

on a une solution double $\lambda_0 = 1$.

on déduit d'après la forme que la solution générale de l'équation homogène

est $y_h(x) = (K_1 + K_2 x) e^x$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles.

→ on cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète.

on distingue 2 cas :

1^{er} cas : si $m \neq 1$, alors on cherche une solution particulière y_p sous la

forme $y_p(x) = (ax + b) e^{mx}$.

on dérive une fois puis deux fois et on reporte dans l'équation

complète: $y_0'' - 2y_0' + y_0 = x e^{mx}$. on obtient:

$$y_0'' - 2y_0' + y_0 = \left[(am^2 - 2am + a)x + 2a(m-1) + b(m^2 - 2m + 1) \right] e^{mx} = x e^{mx}$$

$$= \left(a(m-1)^2 x + 2a(m-1) + b(m-1) \right) e^{mx} = x e^{mx}$$

d'où le système:
$$\begin{cases} a(m-1)^2 = 1 \\ 2a(m-1) + b(m-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{(m-1)^2} \text{ or } b = \frac{-2}{(m-1)^2}$$

on a donc obtenu
$$y_0(x) = \frac{1}{(m-1)^2} \left(x - \frac{2}{m-1} \right) e^{mx}$$

d'où la solution générale (dans ce cas):

$$y_g(x) = y_h(x) + y_0(x) = (K_1 + K_2 x) e^x + \frac{1}{(m-1)^2} \left(x - \frac{2}{m-1} \right) e^{mx}$$

2^{ème} cas: Si $m=1$

Puisque $m=1$ correspond à une solution double du polynôme caractéristique, on augmente le degré de 2, c'est à dire qu'on cherche (dans ce cas) une solution particulière sous la forme:

$$y_0(x) = (ax^3 + bx^2) e^x$$

comme précédemment, on calcule y_0', y_0'' , on remplace dans l'équation complète,

on obtient:
$$y_0'' - 2y_0' + y_0 = ((6a + 4b)x + 2b) e^x = x e^x$$

d'où $a = \frac{1}{6}$ et $b = 0$ car
$$y_0(x) = \frac{1}{6} x^3 e^x$$

d'où la solution générale (dans ce cas)

$$y_g(x) = y_h(x) + y_0(x) = (K_1 + K_2 x) e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x$$

2. $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ on a $\int_{\alpha}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2} \ln x} dx = \left[x \ln x - x \right]_{\alpha}^{1/2}$ 11

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \alpha \ln \alpha - \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

3. Calculons $\int_{\varepsilon}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx$ on pose pour $1-x = u^2$

donc $\int_{\varepsilon}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx = \int_{\sqrt{1-\varepsilon}}^0 \frac{u}{1-u^2} (-2u du) = \int_{\sqrt{1-\varepsilon}}^0 \left(2 - \frac{2}{1-u^2} \right) du$

$$= \left[2u - \ln \left| \frac{4u}{1-u} \right| \right]_{\sqrt{1-\varepsilon}}^0 \quad (\text{après avoir décomposé en éléments simples})$$

$$= \left[-2\sqrt{1-\varepsilon} + \ln \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\sqrt{1-\varepsilon}} \right]$$

4. Nature de $\int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$?

on a $\int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx \stackrel{\text{IPI}}{=} \left[(\ln x)(-2\sqrt{1-x}) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} (-2\sqrt{1-x}) dx$

$$= 2(\ln \varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} + 2 \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx$$

$$\stackrel{\text{d'après 3}}{=} \underbrace{2(\ln \varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} - 4\sqrt{1-\varepsilon} - 2 \ln \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}}_{\text{tend vers } -4 + 2\ln 4 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0}$$

En effet: $\ln \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\sqrt{1-\varepsilon}} \underset{0}{\sim} \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{2} \right) \sim \ln \frac{\varepsilon}{4} = \ln \varepsilon - \ln 4$

et $2(\ln \varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} \underset{0}{\sim} 2\ln \varepsilon$

Donc $\int_0^1 f(x) dx = -4 + 2\ln 4$

Réoudre : $y' + 2xy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2}$ (*)

on résout d'abord l'équation homogène :

$y' + 2xy = 0$ par la méthode de séparation des variables :

$\frac{y'}{y} = -2x \Leftrightarrow \ln|y(x)| = -x^2 + C$

d'où $y(x) = Ke^{-x^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$

on cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante :

on pose donc $y_0(x) = K(x) e^{-x^2}$, on dérive et on reporte dans l'équation,

il reste alors : $K'(x) e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2}$

car $K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ car $K(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

on a donc trouvé la solution particulière $y_0(x) = (\arcsin x) e^{-x^2}$

d'où la solution générale de l'équation (*):

$y_0(x) = (\arcsin x + K) e^{-x^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$

PS: J'espère qu'il n'y aura pas d'ennuis de calcul de ma part.

Bon courage