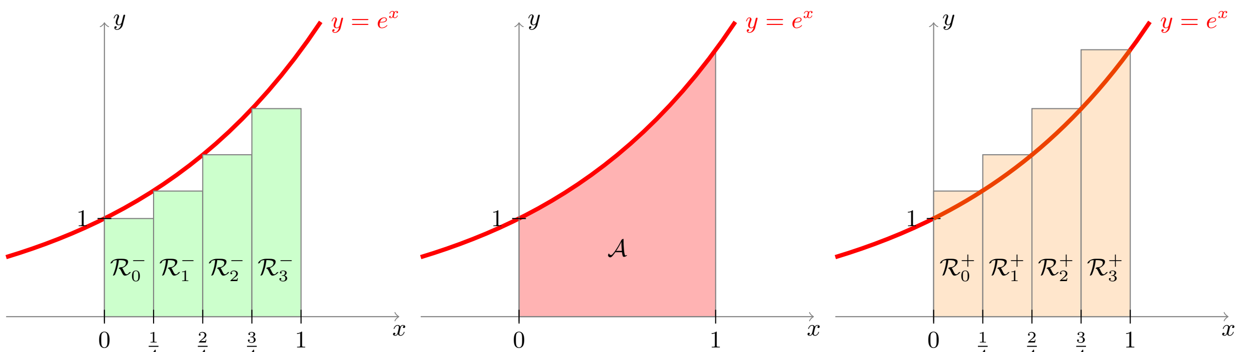
Chapitre 1

Intégrale de Riemann

1.1 Introduction

1.1.1 Motivation

Pour calculer l'aire d'un rectangle, on multiplie la largeur par la longueur. L'aire d'une autre forme géométrique telle qu'un trapèze ou un triangle est obtenue par des transformations géométriques qui ramènent le problème à un calcul d'aire de rectangle. Si l'on souhaite calculer l'aire de la région $\mathcal{A}$ sous le graphe d'une fonction $f : x \mapsto e^x$, il ne serait pas facile de diviser cette région et de la réassembler pour former un rectangle. Il est toutefois possible d'approcher l'aire de $\mathcal{A}$ par des sommes d'aires de rectangles. La figure ci-dessous montre qu'il est possible d'approcher l'aire $\mathcal{A}$ par défaut (par $\mathcal{A}^- = \sum_{k=1}^4 \mathcal{R}^-$) ou par excès (par $\mathcal{A}^+ = \sum_{k=1}^4 \mathcal{R}^+$). La différence entre la valeur approchée par défaut et la valeur approchée par excès peut être réduite en augmentant le nombre de rectangles qui forment $\mathcal{A}^-$ ou de ceux qui forment $\mathcal{A}^+$ ou les deux à la fois.



Aux paragraphes qui suivent nous allons donner plus de précisions sur cette approche.

1.1.2 Prérequis

Le contenu de ce chapitre fait appel aux notions et résultats sur les fonctions d'une variable réelles développés dans le cours d'analyse I.

1.1.3 Objectifs

À l'issue de ce chapitre, l'étudiant est sensé :

- Connaître la définition rigoureuse de l'intégrale sur un segment au sens de **Riemann** .
- Connaître les propriétés de cette intégrale (positivité, linéarité ...)
- Maîtriser l'utilisation des sommes de Riemann des fonctions continues dans le calcul de certaines intégrales et des limites de certaines suites.
- Connaître le "**théorème fondamental de l'analyse**" (lien entre l'intégrale et primitive d'une fonction continue).

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1. Soit $[a,b]$ un intervalle dans $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathcal{S}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ est une **subdivision** de $[a,b]$ si

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b.$$

On dit que $\Phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une **fonction en escalier** s'il existe une subdivision $\mathcal{S}_\Phi=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ et des réels $c_1,\ldots,c_n$ tels que $\Phi(x)=c_i$ pour tout $x\in]x_{i-1},x_i[$.

On dit que $\mathcal{S}_\Phi$ est une '**subdivision adaptée**" à Φ.

La quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-x_{i-1})$ s'appelle l'intégrale de la fonction Φ et on note :

$$\boxed{\int_a^b\Phi(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-x_{i-1})}$$

Proposition 1.

- L'intégrale d'une fonction en escalier ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée.
- Soient Φ et Ψ deux fonctions en escalier définies sur un intervalle $[a,b]$, alors :

i) Pour tout nombre réel λ, $\lambda\Phi+\Psi$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b\lambda(\Phi+\Psi)(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b\Phi(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b\Psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

ii) Si $\Phi\le\Psi$, alors $\displaystyle\int_a^b\Phi(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b\Psi(x)\,\mathrm{d}x.$

iii) Pour tout $c \in]a,b[$, les restrictions de Φ à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont des fonctions en escalier et on a $\displaystyle\int_a^b \Phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c \Phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b \Phi(x)\,\mathrm{d}x.$

Démonstration. (voir TD)

Idée de la preuve : si $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ et $a = y_0 < y_1 < ... < y_m = b$ sont deux subdivisions du segment $[a,b]$, l'ensemble $E := \{x_i \;:\; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j \;:\; 1 \leq j \leq m\}$ est fini donc on a $E = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ avec $z_1 < z_2 < ... < z_p$. Donc $(z_1, z_2, ..., z_p)$ une subdivision de $[a,b]$ "plus fine" que les deux autres subdivisions... $\square$

Remarque 1.

– En faite l'ensemble des fonction en escalier sur un ségment $[a,b]$, qu'on peut noté $\mathcal{E}([a,b])$, est également stable pour le produit des fonctions. C'est donc une algèbre. La proposition précédente assure que l'application $\Phi \mapsto \displaystyle\int_a^b \Phi$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{E}([a,b])$.

– En général $\displaystyle\int_a^b (\Phi\Psi)(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b \Phi(x)\,dx \int_a^b \Psi(x)\,\mathrm{d}x.$

Exemple 1. Soit la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, les aires $\mathcal{A}^-$ et $\mathcal{A}^+$ sont respectivement les intégrales des fonctions en escaliers Φ^- et Φ^+ définies par :

$$\forall k \in \{1, \ldots, 4\}, \forall x \in \left]\frac{k-1}{4}, \frac{k}{4}\right[, \quad \Phi^-(x) = \exp\frac{k-1}{4} \quad \text{et} \quad \Phi^+(x) = \exp\frac{k}{4}.$$

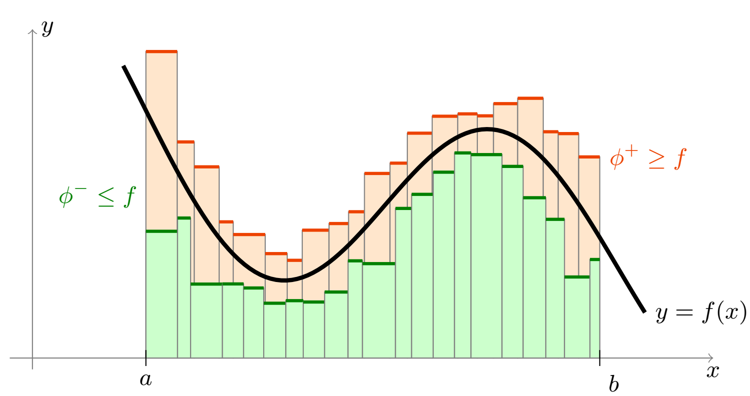
1.3 Fonction intégrable

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, c-à-d il existe une constante $M \geq 0$ telle que :

$$\forall x \in [a,b] \quad -M \leq f(x) \leq M.$$

On pose

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi^-(x)\,\mathrm{d}x \mid \phi^- \text{est une fonction en escalier telle que } \phi^- \leq f\right\}$$
$$I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b \phi^+(x)\,\mathrm{d}x \mid \phi^+ \text{ est une fonction en escalier telle que } \phi^+ \geq f\right\}$$



Proposition 2. On a $I^-(f)$ et $I^+(f)$ existent dans $\mathbb{R}$ et $I^-(f) \leq I^+(f)$.

Démonstration. L'ensemble $\left\{\int_a^b \phi^-(x)\ \mathrm{d}x \mid \phi^- \text{est une fonction en escalier telle que } \phi^- \leq f\right\}$ (resp. $\left\{\int_a^b \phi^+(x)\ \mathrm{d}x \mid \phi^+ \text{ est une fonction en escalier telle que } \phi^+ \geq f\right\}$) est non vide car il contient $\int_a^b -M\ \mathrm{d}x$ (resp. $\int_a^b M\ \mathrm{d}x$).

Soit Φ^+ une fonction en escalier sur $[a,b]$ telle que $f \leq \Phi^+$. Pour toute fonction en escalier $\Phi^- \leq f$, on a $\Phi^- \leq \Phi^+$, donc $\int_a^b \Phi^-(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b \Phi^+(x)\ \mathrm{d}x$. D'où $I^-(f)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $I^-(f) \leq \int_a^b \Phi^+(x)\ \mathrm{d}x$, pour tout fonction en escalier $\Phi^+ \geq f$. Ainsi $I^+(f)$ existe et $I^+(f) \geq I^-(f)$. □

Définition 2. Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite **intégrable (au sens de Riemann)** si $I^-(f) = I^+(f)$. Ce nombre s'appelle l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$. On le note

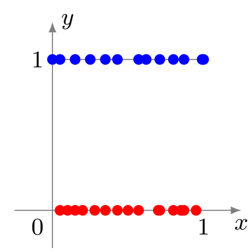
$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}$$

Proposition 3. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonction en escalier Φ et Ψ définies sur $[a,b]$ telles que $\Phi \leq f \leq \Psi$ et $\int_a^b (\Psi - \Phi)(x)\ \mathrm{d}x \leq \epsilon$.

Exemple 2.

- Les fonctions en escalier sont intégrables.
- Il existe des fonctions non intégrables.

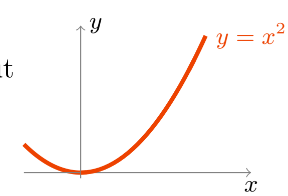
$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$



Il est clair que montrer que $I^-(f) \leq 0$ et que $I^+(f) \geq 1$ et par conséquent f n'est pas intégrable.

Exemple 3.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Est-elle intégrable ? Et si oui, que vaut $\int_0^1 f(x)\ dx$?

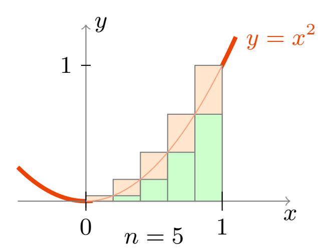


Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons la subdivision régulière de $[0,1]$, $\mathcal{S} = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$

Pour tout $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ on a $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{i}{n}\right)^2$.

Soit les fonctions en escalier ϕ_n^- et ϕ_n^+ définies par

$$\forall x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[, \quad \phi_n^-(x) = \frac{(i-1)^2}{n^2} \quad \text{et} \quad \phi_n^+(x) = \frac{i^2}{n^2}.$$



Remarquons que $(\phi_n^-)_n$ est une suite croissante et que $(\phi_n^+)_n$ est une suite décroissante. D'autre part on a

$$\lim_n \int_0^1 \phi_n^-(x)\ dx = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_n \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}, \text{et}$$

$$\lim_n \int_0^1 \phi_n^+(x)\ dx = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_n \frac{n(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

Nous en déduisons que $I^-(f) = I^+(f) = \dfrac{1}{3}$.

1.4 Propriétés de l'intégrale

1.4.1 Positivité

Proposition 4. Soient f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors on a

$$\boxed{f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.}$$

<u>**Démonstration**</u>. Il suffit de remarquer que si $\Phi^- : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction étagée telle que $\Phi^- \leq f$ alors $\Phi^- \leq g$ et que si $\Phi^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction étagée telle que $\Phi^+ \geq g$ alors $\Phi^+ \geq f$ et par conséquent on a :

$$I^-(f) \leq I^-(g) \leq I^+(g) \leq I^+(f).$$

□

1.4.2 Relation de Chasles

Proposition 5. Soient $a < c < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si, et seulement si, ses restrictions à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont intégrables. De plus, dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 2. Il est clair que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et toute fonction f définie en a, on a $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0$.
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable, alors on note par définition $\displaystyle\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$.

1.4.3 Linéarité de l'intégrale

Proposition 6. Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intevalle $[a, b]$. Alors on a :

1. $f + g$ est intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$
2. Pour tout réel λ, λf est intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$

Exercice 1. [Inégalité de Cauchy Schwarz] Montrer que si f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors fg est intégrable et

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \Big(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

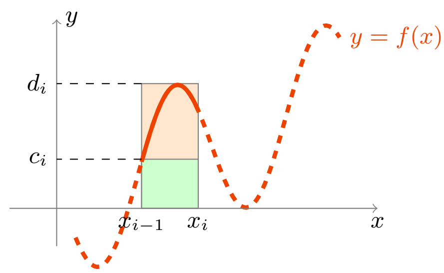
1.5 Fonctions continues et intégrale

Nous avons vue que les fonctions étagées sont intégrables au sens de Riemann. Il existe également d'autres fonctions intégrables.

Théorème 1. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Démonstration. Comme f est continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$, elle est, d'après le théorème de Heine, uniformément continue sur $[a, b]$ c-à-d : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta_\epsilon > 0 : |x - x'| < \eta_\epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$ et une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telle que $0 < x_i - x_{i-1} \leq \eta_\epsilon$. Pour $x \in [x_{i-1}, x_i[$ on pose : $c_i = \phi^-(x) = \inf_{t\in[x_{i-1},x_i[} f(t)$ et $d_i = \phi^+(x) = \sup_{t\in[x_{i-1},x_i[} f(t)$

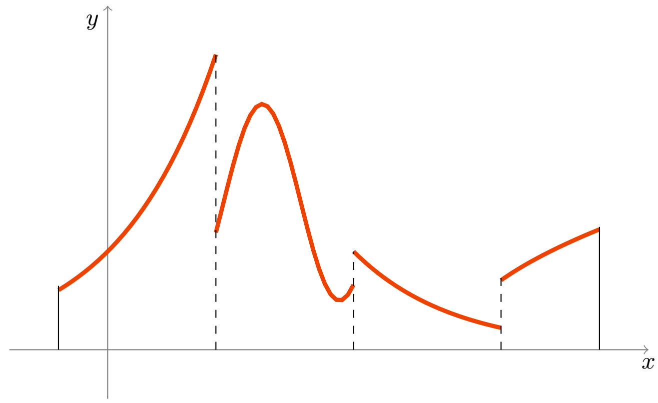


Il est clair que $\phi^- \leq f \leq \phi^+$ et que $\int_a^b \phi^-(x)\ dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_a^b \phi^+(x)\ dx$. Comme f continue sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, il existe $a_i, b_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tels que $f(a_i) = c_i$ et $f(b_i) = d_i$ et donc $d_i - c_i = f(b_i) - f(a_i) \leq \epsilon$. Nous en déduisons que

$$\int_a^b \phi^+(x)\ dx - \int_a^b \phi^-(x)\ dx \leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a).$$

Ainsi, on a $0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq \epsilon(b - a)$ et en faisant tendre ϵ vers 0, on conclut que f est intégrable. $\square$

Définition 3. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ telle que sa restriction à $]x_{i-1}, x_i[$soit continue et $\lim\limits_{x\to x_{i-1}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_{i+1}^-} f(x)$ existent, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.



Corollaire 1. Les fonctions continues par morceaux sont intégrables.

Proposition 7. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors on a

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $-|f| \leq f \leq |f|$ et d'appliquer la Proposition 4. □

Exercice 2. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est réglée si pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $\Phi \leq f \leq \Psi$ et $\Psi - \Phi < \epsilon$.

1) Montrer que toute fonction réglée est intégrable.
2) Montrer que toute fonction continue ou monotone sur un segment est réglée.

1.6 Primitive d'une fonction continue

Dans ce paragraphe nous introduisons la notion de primitive d'une fonction et montrons comment elle est liée à la notion d'intégrale.

1.6.1 Définitions

Définition 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si F est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Exemple 4.

1. – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
   – Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f
   – Et $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ est aussi une primitive de f
2. – Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$
   – $G : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g
   – Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $G + c$ est aussi une primitive de g

Proposition 8. Si F est une primitive de f alors toute primitive de f s'écrit

$G = F + c \quad$ où $c \in \mathbb{R}$

Démonstration.

– Si $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$, donc $G'(x) = f(x)$.

– Si G est une primitive quelconque de f alors $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc $G - F$ est une fonction constante, d'où $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que $(G - F)(x) = c$. Ainsi $G = F + c$. □

Notations :

– Une primitive d'une fonction f est notée $\int f(x)\, dx$, ou $\int f$.

– Si F est une primitive de f alors $F = \int f(t)\, dt + c$, où c est une constante.

Proposition 9. Soient F une primitive de f et G une primitive de g et $\lambda \in \mathbb{R}$

– $F + G$ est une primitive de $f + g$

– λF est une primitive de λf

$$\boxed{\int \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\, dt = \lambda \int f(t)\, dt + \mu \int g(t)\, dt}$$

1.6.2 Primitives des fonctions usuelles

Ci-dessous sont les expressions explicites de quelques primitives de fonctions usuelles.

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \text{sur }]-1, 1[$$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{argsh} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{argch} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases} \text{sur }]1, +\infty[$$

1.7 Théorème Fondamental

Dans ce paragraphe nous allons établir un théorème fondamental en analyse. Ce théorème permet de ramener le calcul de l'intégrale d'une fonction à la recherche d'une primitive. La proposition suivante, qui est un cas particulier de la première formule de la moyenne, nous sera utile pour prouver le théorème fondamental.

Proposition 10. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On a déjà vu que

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

et comme f est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure. □

Théorème 2 (Fondamental). Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\ dt}$$

est la primitive de f qui s'annule en a.

Ainsi pour une primitive F quelconque de f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)}$$

Démonstration. On prouvera le théorème en utilisant la définition, c-à-d en montrant que

$$\lim_{h\to\infty} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Par la relation de Chasles et la Proposition 10, il existe un réel c_h entre x et $x+h$ tel que

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_h).$$

Comme f est continue sur $[a,b]$, on a le résultat par passage à la limite. □

Notation : $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$

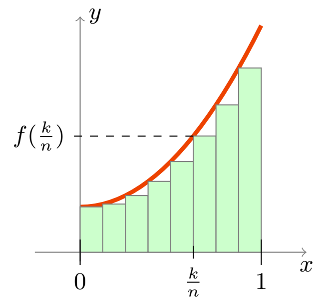
1.8 Sommes de Riemann

Théorème 3. Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors

$$\boxed{S_n = \tfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) \qquad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \qquad \int_a^b f(x)\ dx}$$

Cas fréquent : $a = 0,\ b = 1$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$$



1.9 Exercices

Exercice 1. Soit f est une fonction positive et continue sur $[a,b]$. Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f(x) = 0,\ \forall x \in [a,b]$. **Aide** : On pourra faire un raisonnement par l'absurde.

Exercice 2. Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

Exercice 3. Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

Exercice 4. Calculer la limite de $v_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$.