

Série N 4 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1} .
2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_1 + e_2$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$.
3. Déterminer P la matrice de passage de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) ainsi que P^{-1} .
4. En déduire $f^n(i)$, $f^n(j)$ et $f^n(k)$ pour n entier relatif.

Correction

- 1) Méthode 1 : $\text{rg} f = \dim \text{Im} f = \text{rg}(f(i), f(j), f(k)) = \dim \text{vect}(f(j), f(k), f(i)) = 3$, car la famille $\{f(j), f(k), f(i)\}$ est génératrice. Donc, $\text{rg} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et f est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2 : un calcul simple montre que $\det(M) \neq 0$ donc la matrice M est inversible ce qui implique f est inversible.

Déterminons maintenant l'application inverse f^{-1} : Posons $e_1 = f(i)$, $e_2 = f(j)$ et $e_3 = f(k)$.

$$\begin{cases} e_1 = k \\ e_2 = i - 3k \\ e_3 = j + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_1 \\ i = 3e_1 + e_2 \\ j = -3e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(k) = i \\ f^{-1}(i) = 3i + j \\ f^{-1}(j) = -3i + k \end{cases}$$

et

$$A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (Questions 2) et 3)). Posons $e_1 = xi + yj + zk$ (e_1, e_2 et e_3 désignent d'autres vecteurs que ceux du 1)).

$$f(e_1) = e_1 \Leftrightarrow (f - \text{Id})(e_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

On prend $e_1 = i + j + k$.

Posons $e_2 = xi + yj + zk$.

$$f(e_2) = e_1 + e_2 \Leftrightarrow (f - \text{Id})(e_2) = e_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ et } z = x + 2.$$

On prend $e_2 = j + 2k$.

Posons $e_3 = xi + yj + zk$.

$$f(e_3) = e_2 + e_3 \Leftrightarrow (f - \text{Id})(e_3) = e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = x \text{ et } z = x + 1.$$

On prend $e_3 = k$.

La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base (i, j, k) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 3 et est donc inversible. Par suite (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin,

$$\begin{cases} e_1 = i + j + k \\ e_2 = j + 2k \\ e_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_3 \\ j = e_2 - 2e_3 \\ i = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases},$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Voir question précédente.

3. Soit T est la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) . $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les formules de changement

de bases s'écrivent $T = P^{-1}AP$ ou encore $A = PTP^{-1}$. Par suite, pour tout relatif n , $A^n = PT^nP^{-1}$.

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $N^3 = 0$.

Donc, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, puisque I et N commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$T^n = (I + N)^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule reste claire pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n = -1$, $(I + N)(I - N + N^2) = I + N^3 = I$ et donc

$$T^{-1} = (I + N)^{-1} = I - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{(-1)(-1-1)}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la formule reste vraie pour $n = -1$. Enfin, pour n entier naturel non nul donné, $T^{-n} = (I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2)^{-1}$ mais $(I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2)(I - nN + \frac{-n(-n-1)}{2}N^2) = I$ et donc $T^{-n} = I - nN + \frac{-n(-n-1)}{2}N^2$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, T^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned} A^n &= PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 1 & n+1 & n(n+1)/2 \\ 1 & n+2 & (n+1)(n+2)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1)(n-2)/2 & -n(n-2) & n(n-1)/2 \\ n(n-1)/2 & -(n-1)(n+1) & n(n+1)/2 \\ n(n+1)/2 & -n(n+2) & (n+1)(n+2)/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui fournit $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$.