

Série N 4 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 5

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B .

Correction

1. (a) Commenons par des remarques élémentaires : la matrice est non nulle donc $\text{rg}(A) \geq 1$ et comme il y a $p = 4$ lignes et $n = 3$ colonnes alors $\text{rg}(A) \leq \min(n, p) = 3$.
- (b) Ensuite on va montrer $\text{rg}(A) \geq 2$ en effet le sous-déterminant 2×2 (extrait du coin en haut à gauche) : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ est non nul.
- (c) Montrons que $\text{rg}(A) = 2$. Avec les déterminants il faudrait vérifier que pour toutes les sous-matrices 3×3 les déterminants sont nuls. Pour éviter de nombreux calculs on remarque ici que les colonnes sont liées par la relation $v_2 = v_1 + v_3$. Donc $\text{rg}(A) = 2$.
- (d) L'application linéaire associée à la matrice A est l'application $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Et le théorème du rang $\dim \text{Ker } f_A + \dim \text{Im } f_A = \dim \mathbb{R}^3$ donne ici $\dim \text{Ker } f_A = 3 - \text{rg}(A) = 1$.
Mais la relation $v_2 = v_1 + v_3$ donne immédiatement un élément du noyau : en écrivant $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ alors $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } f_A$. Et comme le noyau est de dimension 1 alors

$$\text{Ker } f_A = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (e) Pour une base de l'image, qui est de dimension 2, il suffit par exemple de prendre les deux premiers vecteurs colonnes de la matrice A (ils sont clairement non colinéaires) :

$$\text{Im } f_A = \text{Vect} \{v_1, v_2\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. On fait le même travail avec B et f_B .

- (a) Matrice non nulle avec 4 lignes et 4 colonnes donc $1 \leq \text{rg}(B) \leq 4$.
- (b) Comme le sous-déterminant (du coin supérieur gauche) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$ est non nul alors $\text{rg}(B) \geq 2$.
- (c) Et pareil avec le sous-déterminant 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

qui est non nul donc $\text{rg}(B) \geq 3$.

-
- (d) Maintenant on calcule le déterminant de la matrice B et on trouve $\det B = 0$, donc $\text{rg}(B) < 4$. Conclusion $\text{rg}(B) = 3$. Par le théorème du rang alors $\dim \text{Ker } f_B = 1$.
- (e) Cela signifie que les colonnes (et aussi les lignes) sont liées, comme il n'est pas clair de trouver la relation la main on résout le système $BX = 0$ pour trouver cette relation ; autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \begin{cases} 2x + 2y - z + 7t = 0 \\ 4x + 3y - z + 11t = 0 \\ -y + 2z - 4t = 0 \\ 3x + 3y - 2z + 11t = 0 \end{cases}$$

Après résolution de ce système on trouve que les solutions s'écrivent $(x, y, z, t) = (-\lambda, -2\lambda, \lambda, \lambda)$. Et ainsi

$$\text{Ker } f_B = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et pour une base de l'image il suffit, par exemple, de prendre les 3 premiers vecteurs colonnes v_1, v_2, v_3 de la matrice B , car ils sont linéairement indépendants :

$$\text{Im } f_B = \text{Vect} \{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$