

Série N 4 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 4

Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. L'application f est-elle inversible ?
3. Déterminer le noyau et l'image de f . Calculer leur dimension respective.
4. Soit Q un élément de l'image de f . Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Correction

1. Il est facile de voir que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ donc f est linéaire, de plus, P étant un polynôme de degré $\leq n$ alors $f(P)$ aussi.
2. Pour $n = 3$ on calcule l'image de chacun des éléments de la base :

$$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0, \quad f(X) = (X+1) + (X-1) - 2X = 0,$$

$$f(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2 - 2X^2 = 2, \quad f(X^3) = (X+1)^3 + (X-1)^3 - 2X^3 = 6X.$$

Donc la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\det(A) = 0$ donc f n'est pas inversible

3. Nous savons que $f(1) = 0$ et $f(X) = 0$ donc 1 et X sont dans le noyau $\text{Ker } f$. Il est aussi clair que les colonnes de la matrices $f(X^2), f(X^3)$ sont linéairement indépendantes. Donc $\text{Im } f = \text{Vect}\{f(X^2), f(X^3)\}$ et $\dim \text{Im } f = 2$.

Par la formule du rang $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}_3[X]$ donc $\dim \text{Ker } f = 2$. Comme nous avons déjà deux vecteurs du noyau alors $\text{Ker } f = \text{Vect}\{1, X\}$.

4. (a) Soit $Q \in \text{Im } f$. Il existe donc $R \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $f(R) = Q$. On pose ensuite $P(X) = R(X) - R(0) - R'(0)X$. On a tout fait pour que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$. De plus par la linéarité de f et son noyau alors

$$f(P) = f(R(X) - R(0) - R'(0)X) = f(R(X)) - R(0)f(1) - R'(0)f(X) = f(R) = Q.$$

Donc notre polynôme P convient.

- (b) Montrons l'unicité. Soient P et $\tilde{P}$ tels que $f(P) = f(\tilde{P}) = Q$ avec $P(0) = P'(0) = 0 = \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(0)$. Alors $f(P - \tilde{P}) = Q - Q = 0$ donc $P - \tilde{P} \in \text{Ker } f = \text{Vect}\{1, X\}$. Ainsi $P - \tilde{P}$ s'écrit $P - \tilde{P} = aX + b$. Mais comme $(P - \tilde{P})(0) = 0$ alors $b = 0$, et comme $(P - \tilde{P})'(0) = 0$ alors $a = 0$. Ce qui prouve $P = \tilde{P}$.