

Série N 4 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Correction

1. -Méthode 1 : **Inversibilité de A en utilisant le rang :**

Si $a = 0$,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_3, C_2))$$

alors $\text{rg}(A) = 3$, donc A est inversible.

Si $a \neq 0$,

$$(\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3 - aC_1))$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

$$(\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3 - \frac{1}{a}C_2))$$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & -a^2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & -\frac{a^3+1}{a} \end{pmatrix}$$

si $a^3 + 1 \neq 0$ ($a \neq -1$) alors $\text{rg}(A) = 3$ c-à-d A inversible.

Méthode 2 : **Inversibilité de A en utilisant le déterminant :**

Calculons le déterminant de A et déterminons pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $1 + a^3 \neq 0$, ce qui équivaut à $a \neq -1$ car $a \in \mathbb{R}$.

2. Calculons A^{-1} lorsque A est inversible, c'est-à-dire $a \neq -1$.

-Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
(A \mid I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & -a^2 & -a & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{matrix} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -\frac{a^3+1}{a} & -a & -\frac{1}{a} & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{a}L_2 \end{matrix} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & \frac{a^2}{a^3+1} & \frac{1}{a^3+1} & \frac{-a}{a^3+1} \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow -\frac{a}{a^3+1}L_3 \end{matrix} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \frac{-a^2}{a^3+1} & \frac{a^3}{a^3+1} & \frac{a}{a^3+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2}{a^3+1} & \frac{1}{a^3+1} & \frac{-a}{a^3+1} \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{a^3+1} & \frac{a^2}{a^3+1} & \frac{1}{a^3+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2}{a^3+1} & \frac{1}{a^3+1} & \frac{-a}{a^3+1} \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{a}L_2 \end{matrix} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a^3+1} & \frac{-a}{a^3+1} & \frac{-a^2}{a^3+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{a^3+1} & \frac{a^2}{a^3+1} & \frac{1}{a^3+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2}{a^3+1} & \frac{1}{a^3+1} & \frac{-a}{a^3+1} \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ L_1 \leftarrow L_1 - aL_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Alors

$$A^{-1} = \frac{-1}{1+a^3} \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

-Méthode 2 : En utilisant la comatrice

On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix},$$

on remarque que $\tilde{A} = {}^t\tilde{A}$ et on a bien $A\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = (-1-a^3)I_3$ d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1-a^3)}\tilde{A} = \frac{1}{-1-a^3} \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$