

Série N 4 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 2

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

Remarque :

I) Le rang d'une matrice est conservé par les opérations élémentaires suivantes sur les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$:

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: on multiplie une colonne par un scalaire non nul
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on ajoute à la colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j
3. $C_i \leftrightarrow C_j$: on échange deux colonnes.

II) Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n .

1.

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & m - \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2 - \frac{1}{2}C_1, C_3 - \frac{1}{3}C_1)) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 0 \\ 1/3 & 1/12 & m - \frac{7}{36} \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3 - C_2)) \end{aligned}$$

Si $m = \frac{7}{36}$, $\text{rg}A = 2$ (on note alors que $C_1 = 6(C_2 - C_3)$) et si $m \neq \frac{7}{36}$, $\text{rg}A = 3$ et A est inversible.

2.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2 - C_1, C_3 - C_1))$$

1er cas. si a, b et c sont deux à deux distincts.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, si a, b et c sont deux à deux distincts alors $\text{rg}A = 3$ (une matrice triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls).

2ème cas. Si $b = c \neq a$ (ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$). A a même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}$ puis que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 0 \end{pmatrix}. \text{ Donc, si } b = c \neq a \text{ ou } a = c \neq b \text{ ou } a = b \neq c, \text{ rg}A = 2.$$

3ème cas. Si $a = b = c$, il est clair dès le départ que A est de rang 1.

3. Puisque $\text{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{rg}(C_1, C_2 - aC_1, C_3 - C_1, C_4 - bC_1)$,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ 1 & b-a & 0 & a-b \\ b & 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

1er cas. Si $a \neq b$.

$$\begin{aligned} \text{rg} A &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(L_1, L_2, L_3) = \text{rg}(L_2, L_1, L_3)). \\ &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 2-a^2-ab \\ 1-ab & -1 & 2-b^2-ab \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (2-b^2-ab) - (2-a^2-ab) \end{pmatrix} \\ &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (a-b)(a+b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $|a| \neq |b|$, $\text{rg} A = 4$ et si $a = -b \neq 0$, $\text{rg} A = 3$.

2ème cas. Si $a = b$.

$$\text{rg} A = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Si $a = b = \pm 1$, $\text{rg} A = 1$ et si $a = b \neq \pm 1$, $\text{rg} A = 2$.