



Algèbre 3 (SMIA).
Série 4.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer la matrice $A^3 - A$.
- (2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 2. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
- (2) Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par:

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

- (1) Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- (2) Donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$.
- (3) Déterminer le noyau et l'image de f . Calculer leur dimension respective.
- (4) Soit Q un élément de l'image de f . Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercices supplémentaires.

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(B)$.

Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B .

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1} .
- (2) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_1 + e_2$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$.
- (3) Déterminer P la matrice de passage de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) ainsi que P^{-1} .
- (4) En déduire $f^n(i)$, $f^n(j)$ et $f^n(k)$ pour n entier relatif.

Exercice 7. Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

- (1) Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3) . Déterminer le noyau de cette application.
- (2) On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3 . Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
- (3) Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3 . Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application ϕ .
- (4) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} . Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?