

Série N 3 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 5

Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y + 3z, -x - y - z).$$

1. Justifier que f est linéaire.
2. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f , noté $\text{Ker } f$.
(b) L'application f est-elle injective ?
3. (a) Donner le rang de f et une base de $\text{Im } f$.
(b) L'application f est-elle surjective ?

Corrigé

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + 2\mathbf{y} + \mathbf{z}, 2\mathbf{x} + \mathbf{y} + 3\mathbf{z}, -\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z})$$

(1) 1- Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f((x, y, z) + (x', y', z')) &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= (x + x' + 2(y + y') + z + z', 2(x + x') + y + y' + 3(z + z'), -(x + x') - (y + y') - (z + z')) \\ &= (x + x' + 2y + 2y' + z + z', 2x + 2x' + y + y' + 3z + 3z', -x - x' - y - y' - z - z') \\ &= (x + 2y + z, 2x + y + 3z, -x - y - z) + (x' + 2y' + z', 2x' + y' + 3z', -x' - y' - z') \\ &= f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{aligned}$$

2- Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x + 2(\lambda y) + \lambda z, 2(\lambda x) + \lambda y + 3(\lambda z), -\lambda x - \lambda y - \lambda z) \\ &= (\lambda(x + 2y + z), \lambda(2x + y + 3z), \lambda(-x - y - z)) \\ &= \lambda(x + 2y + z, 2x + y + 3z, -x - y - z) \\ &= \lambda f(x, y, z) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

$$(2) \text{ (a) } (x, y, z) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

On fait les opérations élémentaires suivantes $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On obtient le système équivalent suivant:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Ainsi $\dim \text{Ker } f = 0$.

(b) Puisque $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, alors f est injective.

(3) (a) On a $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$.

Donc $\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$. On a $\text{Im } f = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = f(e_1) = (1, 2, -1)$, $u_2 = f(e_2) = (2, 1, -1)$, $u_3 = f(e_3) = (1, 3, -1)$. Puisque $\text{rg } f = 3$ alors (u_1, u_2, u_3) est une base de $\text{Im } f$.

(b) On a $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc $f(\mathbb{R}^3) = \text{Im } f = \mathbb{R}^3$. Donc l'application f est surjective.