

Série N 3 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 4

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E .

1. $E \setminus F$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

2. Montrer que

$$\forall x \in F, \forall y \in E \setminus F, x + y \in E \setminus F.$$

3. En déduire que lorsque $F \neq E$, $\text{vect}(E \setminus F) = E$.

Corrigé

(1) $E \setminus F$ n'est jamais un sous espace vectoriel de E car il ne contient pas le vecteur nul.

(2) Soient $x \in F$ et $y \in E \setminus F$. Montrons que $x + y \in E \setminus F$.

Supposons que $x + y \notin E \setminus F$ donc $x + y \in F$ et par suite $y = (x + y) - x \in F$ car $x \in F$ et $x + y \in F$. Ce qui est absurde car on a $y \notin F$. Ainsi $x + y \in E \setminus F$.

(3) On a $\text{Vect}(E) = \text{Vect}(F \cup (E \setminus F)) = \text{Vect}(F) + \text{Vect}(E \setminus F)$. Donc $E = F + \text{Vect}(E \setminus F)$ car $\text{Vect}(E) = E$ et $\text{Vect}(F) = F$.

Supposons que $E \neq F$, donc il existe $x_0 \in E \setminus F$. Soit $x \in E$ donc il existe $f \in F$, il existe $g \in \text{Vect}(E \setminus F)$ tel que $x = f + g$. Donc $x = (f + x_0) + g - x_0$. On a $f + x_0 \in E \setminus F$ d'après (2). Ainsi x est une combinaison linéaire d'éléments de $\text{Vect}(E \setminus F)$. Donc $x \in \text{Vect}(E \setminus F)$. Par conséquent $E = \text{Vect}(E \setminus F)$.