

Série N 3 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 3

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par l'équation $x+z=t+y$, et G défini par $y+t=x-y-z=0$.

1. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de F . Soit $a = (3, 1, 2, 4)$. Déterminer les coordonnées de a dans cette base.
2. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de G . Soit $b = (4, 1, 3, -1)$. Déterminer les coordonnées de b dans cette base.
3. Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.

Corrigé

(1) On a $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + z = t + y\}$:

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in F &\Leftrightarrow x + z = t + y \\
 &\Leftrightarrow t = x + z - y \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, y, z, x + z - y) \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 1) \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in Vect\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)\}
 \end{aligned}$$

Donc $F = Vect\{f_1, f_2, f_3\}$ où $f_1 = (1, 0, 0, 1)$, $f_2 = (0, 1, 0, -1)$, et $f_3 = (0, 0, 1, 1)$.

On montre facilement que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre.

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Puisque la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre et génératrice de F alors (f_1, f_2, f_3) est une base de F . Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3.

Soient a_1, a_2, a_3 les coordonnées de a dans la base (f_1, f_2, f_3) . Alors :

$a = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$. On obtient :

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \end{cases}$$

(2) On a $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y + t = x - y - z = 0\}$

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in G &\Leftrightarrow y + t = 0, x - y - z = 0 \\
 &\Leftrightarrow t = -y, z = x - y \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, y, x - y, -y) \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, -1, -1) \\
 &\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in Vect\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, -1)\}
 \end{aligned}$$

Donc $G = Vect(g_1, g_2)$ où $g_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $g_2 = (0, 1, -1, -1)$.

Puisque les deux vecteurs g_1 et g_2 ne sont pas colinéaires, alors $\{g_1, g_2\}$ est libre. Ainsi, (g_1, g_2) est une base

de G . Par conséquent, G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.
 Soient b_1, b_2 les coordonnées de b dans la base (g_1, g_2) . Alors $b = b_1g_1 + b_2g_2$. On obtient:

$$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = 1 \\ b_1 - b_2 = 3 \\ -b_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

(3) On a:

$$(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - y - t = 0 \\ x - y - z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$$

On effectue l'opération élémentaire suivante $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient le système équivalent suivant:

$$\begin{cases} x + z - y - t = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \\ t = 2z \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(-z, -2z, z, 2z)/z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1, -2, 1, 2)/z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(-1, -2, 1, 2)\} \end{aligned}$$

$\{(-1, -2, 1, 2)\}$ est une base du sous espace vectoriel $F \cap G = Vect\{(-1, -2, 1, 2)\}$ et sa dimension est égale à 1.