

Série N 3 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 2

1. Les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0, -1)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 2, 1, -1)$ sont-ils libres sur l'espace $\mathbb{R}^4$? Déterminer une base de $\text{vect}(v_1, v_2, v_3)$.
2. Si $F = \text{vect}\{(-1, -1, 0, 2), (2, 1, 3, 1), (4, 5, 9, -1)\}$ et $G = \text{vect}\{(1, 1, 1, 1), (3, -4, 4, 2)\}$ déterminer une base de $F + G$, $F \cap G$ ainsi que les équations de $F + G$.
3. Déterminer les éventuelles relations linéaires liant les polynômes suivants

$$P_1(X) = X^3 + 4X^2 - 2X + 3, P_2(X) = 2X^3 + 10X^2 - 3X + 7, P_3(X) = 2X^3 + 4X^2 - 6X + 4.$$

4. Montrer que les vecteurs $w_1 = (1 + i, 1 + 2i, i)$, $w_2 = (2i, 1 - i, -1)$ et $w_3 = (0, -1 + 2i, 2 + i)$ sont linéairement dépendants, si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et sont libres si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

(1)

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

On fait l'opération élémentaire suivante $L_1 \leftrightarrow L_2$, on obtient le système équivalent suivant:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$$

Pour $y = 1$, on a $v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Ainsi, les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 ne sont pas libres sur l'espace $\mathbb{R}^4$; ils sont liés.

On a $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_1 + v_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et puisque Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, ils sont donc libres. Ainsi, (v_1, v_2) est une base de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

(2)

- $(x, y, z, t) \in F \cap G$ si et seulement si il existe $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z, t) = af_1 + bf_2 + cf_3 = \alpha g_1 + \beta g_2$.

$$(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b + 4c = \alpha + 3\beta \\ y = -a + b + 5c = \alpha - 4\beta \\ z = 3b + 9c = \alpha + 4\beta \\ t = 2a + b - c = \alpha + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + 4c - \alpha - 3\beta = 0 \\ -a + b + 5c - \alpha + 4\beta = 0 \\ 3b + 9c - \alpha - 4\beta = 0 \\ 2a + b - c - \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b - 4c + \alpha + 3\beta = 0 \\ a - b - 5c + \alpha - 4\beta = 0 \\ 2a + b - c - \alpha - 2\beta = 0 \\ 3b + 9c - \alpha - 4\beta = 0 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on obtient le système équivalent suivant:

$$\begin{cases} a - 2b - 4c + \alpha + 3\beta = 0 \\ b - c - 7\beta = 0 \\ 12c - 3\alpha + 27\beta = 0 \\ 12c - \alpha + 17\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 6\beta \\ c = -\beta \\ \alpha = 5\beta \end{cases}$$

Ainsi, $(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow x = 8\beta, y = \beta, z = 9\beta, t = 7\beta$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = \beta(8, 1, 9, 7).$$

Par conséquent, $F \cap G = Vect(8, 1, 9, 7)$ admet le vecteur $(8, 1, 9, 7)$ comme base puisqu'il est non nul.

• Nous avons montré que $af_1 + bf_2 + cf_3 = \alpha g_1 + \beta g_2$, donc pour $\beta = 1$, on aura $6f_2 - f_3 = 5g_1 + g_2 \in F \cap G$.

On a $F + G = Vect(f_1, f_2, f_3, g_1, g_2) = Vect(f_1, f_2, f_3, g_1, 6f_2 - f_3 - 5g_1) = Vect(f_1, f_2, f_3, g_1)$.

Montrons que (f_1, f_2, f_3, g_1) est libre. En effet, on a :

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + dg_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + 4c + d = 0 \\ -a + b + 5c + d = 0 \\ 3b + 9c + d = 0 \\ 2a + b - c + d = 0 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires suivantes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$, on obtient le premier système après, on fait les opérations suivantes $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2$ et on obtient le deuxième équivalent, puis, on fait l'opération élémentaire $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$:

$$\begin{cases} -a + 2b + 4c + d = 0 \\ -b + c = 0 \\ 3b + 9c + d = 0 \\ 5b + 7c + 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + 4c + d = 0 \\ -b + c = 0 \\ 12c + d = 0 \\ 12c + 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + 4c + d = 0 \\ -b + c = 0 \\ 12c + d = 0 \\ 2d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ainsi, (f_1, f_2, f_3, g_1) est libre et donc c'est une base de $F + G = Vect(f_1, f_2, f_3, g_1)$.

$F + G = \{xf_1 + yf_2 + zf_3 + tg_1 / (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$

(3)

$$\begin{aligned} \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X) = 0 &\Leftrightarrow \alpha(X^3 + 4X^2 - 2X + 3) + \beta(2X^3 + 10X^2 - 3X + 7) + \\ &\gamma(2X^3 + 4X^2 - 6X + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta + 2\gamma)X^3 + (4\alpha + 10\beta + 4\gamma)X^2 + \\ &(-2\alpha - 3\beta - 6\gamma)X + (3\alpha + 7\beta + 4\gamma) = 0 \end{aligned}$$

On obtient le système linéaire suivant:
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 4\alpha + 10\beta + 4\gamma = 0 \\ -2\alpha - 3\beta - 6\gamma = 0 \\ 3\alpha + 7\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

On fait les opérations élémentaires suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$, on obtient le système équivalent suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\beta - 4\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -6\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{array} \right.$$

Donc l'ensemble des solutions de ce système est

$$\{(-6\gamma, 2\gamma, \gamma) = \gamma(-6, 2, 1)\}.$$

Ainsi, $6P_1(X) - 2P_2(X) - P_3(X) = 0$.

(4) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$. Alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(1+i) + b2i = 0 \\ a(1+2i) + b(1-i) + c(-1+2i) = 0 \\ ai - b + c(2+i) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + (a+2b)i = 0 \\ a + b - c + (2a - b + 2c)i = 0 \\ -b + 2c + (a+c)i = 0 \end{array} \right.$$

On montre facilement que $a = b = c = 0$.