

Série N 3 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 1

1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_1(x, y, z) &= (3x + y, z, 4z + y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{C} & f_2(x, y, z) &= x + y - iz \\ f_3 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_3(x, y, z) &= (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 & f_4(x, y) &= (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_5(P) &= (P(-1), P(0), P(1)). \\ f_6 : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] & f_6(P) &= P(X + 1) - P(X - 1) + P'(X) \end{aligned}$$

2. Soient f et g , applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \Re e(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -e.v., et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ -e.v.

Corrigé

(1) • $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (3\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}, 4\mathbf{z} + \mathbf{y})$

1— Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f_1((x, y, z) + (x', y', z')) &= f_1(x + x', y + y', z + z') \\ &= (3(x + x') + y + y', z + z', 4(z + z') + y + y') \\ &= (3x + 3x' + y + y', z + z', 4z + 4z' + y + y') \\ &= (3x + y, z, 4z + y) + (3x' + y', z', 4z' + y') \\ &= f_1(x, y, z) + f_1(x', y', z') \end{aligned}$$

2— Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_1(\lambda(x, y, z)) &= f_1(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (3(\lambda x) + \lambda y, \lambda z, 4(\lambda z) + \lambda y) \\ &= (\lambda(3x + y), \lambda z, \lambda(4z + y)) \\ &= \lambda(3x + y, z, 4z + y) \\ &= \lambda f_1(x, y, z) \end{aligned}$$

Donc f_1 est linéaire.

• $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} - i\mathbf{z}$

1— Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f_2((x, y, z) + (x', y', z')) &= f_2(x + x', y + y', z + z') \\ &= x + x' + y + y' - i(z + z') \\ &= x + x' + y + y' - iz - iz' \\ &= (x + y - iz) + (x' + y' - iz') \\ &= f_2(x, y, z) + f_2(x', y', z') \end{aligned}$$

2— Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda(x, y, z)) &= f_2(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= \lambda x + \lambda y - i\lambda z \\ &= \lambda(x + y - iz) \\ &= \lambda f_2(x, y, z) \end{aligned}$$

Donc f_2 est linéaire.

• De la même manière, on montre facilement que f_3 et f_4 sont linéaires.

• $\mathbf{f}_5(\mathbf{P}) = (\mathbf{P}(-1), \mathbf{P}(0), \mathbf{P}(1))$

1– Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$:

$$\begin{aligned} f_5(P+Q) &= ((P+Q)(-1), (P+Q)(0), (P+Q)(1)) \\ &= (P(-1) + Q(-1), P(0) + Q(0), P(1) + Q(1)) \\ &= (P(-1), P(0), P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1)) \\ &= f_5(P) + f_5(Q) \end{aligned}$$

2– Soient $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_5(\lambda P) &= ((\lambda P)(-1), (\lambda P)(0), (\lambda P)(1)) \\ &= (\lambda P(-1), \lambda P(0), \lambda P(1)) \\ &= \lambda(P(-1), P(0), P(1)) \\ &= \lambda f_5(x, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi, f_5 est linéaire.

• $\mathbf{f}_6(\mathbf{P}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} + 1) - \mathbf{P}(\mathbf{X} - 1) + \mathbf{P}'(\mathbf{X})$

1– Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned} f_6(P+Q) &= (P+Q)(X+1) - (P+Q)(X-1) + (P+Q)'(X) \\ &= P(X+1) + Q(X+1) - P(X-1) - Q(X-1) + P'(X) + Q'(X) \\ &= (P(X+1) - P(X-1) + P'(X)) + (Q(X+1) - Q(X-1) + Q'(X)) \\ &= f_6(P) + f_6(Q) \end{aligned}$$

2– Soient $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_6(\lambda P) &= (\lambda P)(X+1) - (\lambda P)(X-1) + (\lambda P)'(X) \\ &= \lambda P(X+1) - \lambda P(X-1) + \lambda P'(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X-1) + P'(X)) \\ &= \lambda f_6(x, y, z) \end{aligned}$$

Ainsi, f_6 est linéaire.

(2)

• $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{z}}$

1– Soient $z = x + iy, z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(z+z') &= \overline{z+z'} = (x+x') - i(y+y') \\ &= (x+x') - i(y+y') = (x-iy) + (x'-iy') \\ &= \bar{z} + \bar{z}' \\ &= f(z) + f(z') \end{aligned}$$

2– Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \lambda \bar{z} = \lambda x - i\lambda y$$

Puisque $\lambda x, \lambda y \in \mathbb{R}$, on aura :

$$\begin{aligned} f(\lambda z) &= \lambda x - i\lambda y = \lambda(x - iy) \\ &= \lambda f(z) \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

f n'est pas linéaire sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. En effet, soient $z = 2 - i \in \mathbb{C}$ et $\lambda = 3i \in \mathbb{C}$. On a : $f(\lambda z) = f(3i(2 - i)) = f(3 + 6i) = 3 - 6i$ or on a $\lambda f(z) = 3if(2 - i) = 3i(2 + i) = -3 + 6i$.

• $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \Re(\mathbf{z})$

1– Soient $z = x + iy, z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(z+z') &= \Re(z+z') = x+x' = \Re(z) + \Re(z') \\ &= g(z) + g(z') \end{aligned}$$

2– Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$g(\lambda z) = \Re(\lambda z) = \Re(\lambda x + i\lambda y)$$

Puisque $\lambda x, \lambda y \in \mathbb{R}$, on aura :

$$\begin{aligned} g(\lambda z) &= \lambda x = \lambda \Re(z) \\ &= \lambda g(z) \end{aligned}$$

Ainsi, g est linéaire sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

g n'est pas linéaire sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. En effet, soient $z = 3 + 4i \in \mathbb{C}$ et $\lambda = 2i \in \mathbb{C}$. On a : $g(\lambda z) = g(2i(3 + 4i)) = g(-8 + 6i) = -8$ or on a $\lambda g(z) = 2ig(3 + 4i) = 6i$.