



### Algèbre 3 (SMIA). Série III.

**Exercice 1.** (1) Déterminer si les applications suivantes sont linéaires:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_1(x, y, z) &= (3x + y, z, 4z + y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{C} & f_2(x, y, z) &= x + y - iz \\ f_3 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_3(x, y, z) &= (2x + y + z, y - z, x + y) \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 & f_4(x, y) &= (y, 0, x - 7y, x + y) \\ f_5 : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 & f_5(P) &= (P(-1), P(0), P(1)). \\ f_6 : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] & f_6(P) &= P(X + 1) - P(X - 1) + P'(X) \end{aligned}$$

(2) Soient  $f$  et  $g$ , applications de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , définies par  $f(z) = \bar{z}$  et  $g(z) = \Re(z)$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont linéaires sur  $\mathbb{C}$  en tant que  $\mathbb{R}$ -e.v., et non linéaires sur  $\mathbb{C}$  en tant que  $\mathbb{C}$ -e.v.

**Exercice 2.** (1) Les vecteurs  $v_1 = (1, 1, 0, -1)$ ,  $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$  et  $v_3 = (0, 2, 1, -1)$  sont-ils libres sur l'espace  $\mathbb{R}^4$ ? Déterminer une base de  $\text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ .

(2) Si  $F = \text{vect}\{(-1, -1, 0, 2), (2, 1, 3, 1), (4, 5, 9, -1)\}$  et  $G = \text{vect}\{(1, 1, 1, 1), (3, -4, 4, 2)\}$  déterminer une base de  $F + G$ ,  $F \cap G$  ainsi que les équations de  $F + G$ .

(3) Déterminer les éventuelles relations linéaires liant les polynômes suivants

$$P_1(X) = X^3 + 4X^2 - 2X + 3, P_2(X) = 2X^3 + 10X^2 - 3X + 7, P_3(X) = 2X^3 + 4X^2 - 6X + 4.$$

(4) Montrer que les vecteurs  $w_1 = (1 + i, 1 + 2i, i)$ ,  $w_2 = (2i, 1 - i, -1)$  et  $w_3 = (0, -1 + 2i, 2 + i)$  sont linéairement dépendants, si  $\mathbb{C}^3$  est considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  et sont libres si  $\mathbb{C}^3$  est considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  défini par l'équation  $x + z = t + y$ , et  $G$  défini par  $y + t = x - y - z = 0$ .

(1) Déterminer la dimension ainsi qu'une base de  $F$ . Soit  $a = (3, 1, 2, 4)$ . Déterminer les coordonnées de  $a$  dans cette base.

(2) Déterminer la dimension ainsi qu'une base de  $G$ . Soit  $b = (4, 1, 3, -1)$ . Déterminer les coordonnées de  $b$  dans cette base.

(3) Déterminer la dimension et une base de  $F \cap G$ .

**Exercice 4.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $E$ .

(1)  $E \setminus F$  est-il un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

(2) Montrer que

$$\forall x \in F, \forall y \in E \setminus F, x + y \in E \setminus F.$$

(3) En déduire que lorsque  $F \neq E$ ,  $\text{vect}(E \setminus F) = E$ .

**Exercice 5.** Soit l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y + 3z, -x - y - z).$$

- (1) Justifier que  $f$  est linéaire.
- (2) (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de  $f$ , noté  $\text{Ker}f$ .  
(b) L'application  $f$  est-elle injective ?
- (3) (a) Donner le rang de  $f$  et une base de  $\text{Im}f$ .  
(b) L'application  $f$  est-elle surjective ?

### Exercices supplémentaires.

**Exercice 6.** Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels sur un corps  $\mathbb{K}$ ,  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  des applications linéaires,  $g'$  la restriction de  $g$  à  $\text{Im}f$ .

- (1) Montrer que  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}f$  si et seulement si  $\text{Ker}g' = \{0\}$  et que  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}g'$  si et seulement si  $F = \text{Ker}g' + \text{Im}g'$ .
- (2) On suppose de plus,  $E, F$  et  $G$  de dimension finie
  - a) Montrer que  $\dim \text{Ker}(g \circ f) = \dim \text{Ker}f + \dim \text{Ker}g'$  et en déduire que
 
$$\dim \text{Ker}f \leq \dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}f + \dim \text{Ker}g$$
  - b) Montrer que si  $f$  surjective, alors  $\text{rg}((g \circ f)) = \text{rg}(g)$  (réciproque).
  - c) Montrer que si  $g$  est injective, alors  $\text{rg}((g \circ f)) = \text{rg}(f)$  (réciproque).

**Exercice 7.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ .

- (1) Montrer que  $[(\forall g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0) \Rightarrow f \text{ bijective}]$ .
- (2) On pose  $\dim E = p$ ,  $\dim F = n$  et  $\text{rg}f = r$ . Calculer la dimension de  $\{g \in \mathcal{L}(F, E) / f \circ g \circ f = 0\}$ .

### Exercice 8.

Soit l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + y + 3z - 3t, x + 2z - t, x - y + z + t).$$

- (1) Déterminer une base de  $\text{Ker}f$  et de  $\text{Im}f$
- (2) Montrer que si  $E =: \mathbb{R}^4$ ,  $g : E \rightarrow E$ ,  $(x, y, z, t) \mapsto (t, z - t, x + y, x)$ ,  $F = \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$  et  $G = \text{Ker}(g + \text{Id}_E)$  alors  $E = F \oplus G$ .

**Exercice 9.** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

- Soit  $f : E \rightarrow E$ .  $f$  est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de  $\text{Ker}f$ .
- Mêmes questions avec  $g : E \rightarrow E$ ,  $P \mapsto \int_0^x P(t) dt$ .

**Exercice 10.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même telle que  $f^2 = f$ .

- (1) Montrer que  $E = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$ .
- (2) Supposons que  $E$  soit de dimension finie  $n$ . Posons  $\text{rg}(f) = \dim \text{Im}f$ . Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que :  $f(e_i) = e_i$  si  $i \leq r$  et  $f(e_i) = 0$  si  $i > r$ .