

Série N 2 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 5

Pour $a \in \mathbb{C}$, on note f_a l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = e^{ax}$.

1) Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(Indication : raisonner par récurrence sur le nombre n d'éléments d'une sous famille finie, multiplier par $e^{-a_{n+1}x}$ puis dériver).

2) En déduire que la famille $(g_a)_{a \in \mathbb{R}^+}$ où g_a est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_a(x) = \cos(ax)$ est libre dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé

1. Pour montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ il suffit de montrer que pour toute sous famille finie $\{f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n}\}$ de $(f_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est une famille libre.

Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que la famille suivante $\{f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n}\}$ est une famille libre. En utilisant la récurrence :

* Pour $n = 1$, nous avons :

$$\lambda_1 f_{a_1}(x) = 0 \implies \lambda_1 e^{a_1 x} = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

* Supposons que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i}(x) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

* Montrons que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{a_i}(x) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0?$$

$$\text{On a : } \lambda_1 f_{a_1}(x) + \lambda_2 f_{a_2}(x) + \dots + \lambda_n f_{a_n}(x) + \lambda_{n+1} f_{a_{n+1}}(x) = 0$$

$$\implies \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_n e^{a_n x} + \lambda_{n+1} e^{a_{n+1} x} = 0.$$

Multiplier par $e^{-a_{n+1}x}$:

$$\lambda_1 e^{(a_1 - a_{n+1})x} + \lambda_2 e^{(a_2 - a_{n+1})x} + \dots + \lambda_n e^{(a_n - a_{n+1})x} + \lambda_{n+1} = 0.$$

Dériver :

$$\lambda_1 (a_1 - a_{n+1}) e^{(a_1 - a_{n+1})x} + \lambda_2 (a_2 - a_{n+1}) e^{(a_2 - a_{n+1})x} + \dots + \lambda_n (a_n - a_{n+1}) e^{(a_n - a_{n+1})x} = 0.$$

Ce qui donne :

$$\lambda_1 (a_1 - a_{n+1}) f_{a_1 - a_{n+1}}(x) + \lambda_2 (a_2 - a_{n+1}) f_{a_2 - a_{n+1}}(x) + \dots + \lambda_n (a_n - a_{n+1}) f_{a_n - a_{n+1}}(x) = 0,$$

D'après la récurrence :

$$\lambda_1 (a_1 - a_{n+1}) = \lambda_2 (a_2 - a_{n+1}) = \lambda_n (a_n - a_{n+1}) = 0.$$

On obtient :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0.$$

Ainsi $\lambda_{n+1} = 0$.

D'où : $\{f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n}\}$ est une famille libre.

2. On considère une sous famille $\{g_{a_1}, g_{a_2}, \dots, g_{a_n}\}$ avec $a_k \in \mathbb{R}^+$.

Montrons que cette sous famille est libre.

Puisque $g_{a_k}(x) = \cos(a_k x) = \frac{1}{2}(e^{ia_k x} + e^{-ia_k x})$, alors :

$$\lambda_1 \frac{e^{ia_1 x} + e^{-ia_1 x}}{2} + \lambda_2 \frac{e^{ia_2 x} + e^{-ia_2 x}}{2} + \dots + \lambda_n \frac{e^{ia_n x} + e^{-ia_n x}}{2} = 0.$$

On obtient :

$$\lambda_1 e^{ia_1 x} + \dots + \lambda_n e^{ia_n x} + \lambda_1 e^{-ia_1 x} + \dots + \lambda_n e^{-ia_n x} = 0.$$

On pose : $\alpha_k = \alpha_{k+n} = \lambda_k$, $b_k = ia_k \in \mathbb{C}$ et $b_{k+n} = -ia_k \in \mathbb{C}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Ceci donne :

$$\alpha_1 e^{b_1 x} + \dots + \alpha_n e^{b_n x} + \alpha_{n+1} e^{b_{n+1} x} + \dots + \alpha_{2n} e^{b_{2n} x} = 0.$$

D'après la question 1), on déduit :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = \dots = \alpha_{2n} = 0.$$

idem

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

D'où : $(g_a)_{a \in \mathbb{R}^+}$ est une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.