

Série N 2 - Corrigé  
Algèbre 3 - Filière SMIA.

**Exercice 4**

Soit  $F = \left\{ f \in C([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$ ,  $G = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}$ .

Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

**Corrigé**

\* Soit  $f \in F \cap G$ , alors  $f$  est une fonction constante égale à  $c$  qui vérifie  $\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$ , on obtient  $f \equiv 0$ . D'où  $F \cap G = \{0\}$ .

\* Soit  $f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$ . On pose  $c = \int_{-1}^1 f(t) dt$  (c'est une constante).

La fonction

$$\begin{array}{ccc} f_1 & : & [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ & & x \mapsto f_1(x) = \frac{1}{2}c \end{array}$$

est un élément de  $G$ .

On considère la fonction :

$$\begin{array}{ccc} f_2 & : & [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ & & x \mapsto f_2(x) = f(x) - \frac{1}{2}c \end{array}$$

$f_2 \in F$ . En effet,

$$\int_{-1}^1 f_2(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt - \frac{1}{2}c \int_{-1}^1 dt = 0.$$

Par construction, nous avons  $f_2 = f - f_1$ , ainsi  $f = f_1 + f_2$ . Donc pour tout  $f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$ , il existe  $f_1 \in G$  et  $f_2 \in F$  telles que  $f = f_1 + f_2$ . Conclusion :

$$\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) = F \oplus G.$$