

Série N 2 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 3

a) Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F une partie de E formée des applications de la forme :

$$x \rightarrow P(x) \cos x + Q(x) \sin x, \text{ avec } P \text{ et } Q \in \mathbb{R}[X]$$

Montrer que F est un sous espace vectoriel de E .

b) Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $p \geq 1$. Montrer que l'ensemble $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid A \text{ divise } P\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et déterminer un supplémentaire de G .

Corrigé

a) * La partie F est non vide. En effet, pour $P = Q = 0$ de $\mathbb{R}[X]$, la fonction $f \equiv 0$ est un élément de F car elle s'écrit sous la forme

$$f(x) = P(x) \cos(x) + Q(x) \sin(x)$$

* Soient f, g deux éléments de F et α un réel. On a :

$$f(x) = P_1(x) \cos(x) + Q_1(x) \sin(x) \text{ et } g(x) = P_2(x) \cos(x) + Q_2(x) \sin(x),$$

avec P_1, P_2, Q_1, Q_2 de $\mathbb{R}[X]$.

Posons $h(x) = (f + \alpha g)(x)$. Donc,

$$h(x) = f(x) + \alpha g(x) = (P_1 + \alpha P_2)(x) \cos(x) + (Q_1 + \alpha Q_2)(x) \sin(x)$$

Ce qui donne $h(x) = P(x) \cos(x) + Q(x) \sin(x)$,

avec $P = P_1 + \alpha P_2, Q = Q_1 + \alpha Q_2 \in \mathbb{R}[X]$. D'où : $h \in F$. Ainsi, F est un sous espace vectoriel de E .

b) Soit $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré n .

On note $\mathbb{K}_n[X] := \mathbb{K}[X]$, et on pose $G = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid A \text{ divise } P\}$ avec A un polynôme de degré $p \geq 1$.

G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$

* G est non vide car A divise lui-même donc $A \in G$.

* Soient $(P_1, P_2) \in G \times G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\exists Q_1 \in \mathbb{K}_n[X] \text{ telle que } P_1 = A Q_1 \tag{1}$$

$$\exists Q_2 \in \mathbb{K}_n[X] \text{ telle que } P_2 = A Q_2 \tag{2}$$

De (1) et (2), on obtient :

$$P_1 + \lambda P_2 = A(Q_1 + \lambda Q_2)$$

Donc A divise $P_1 + \lambda P_2$, ainsi $P_1 + \lambda P_2 \in G$.

Supplémentaire de G dans $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $\deg(A) = p$. Si $B \notin G$, alors A ne divise pas B , c'est-à-dire : $\exists Q, R \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que : $B = A Q + R$
 où $\deg(R) < \deg(A) = p$.
 On pose : $P = A Q$, donc $P \in G$.
 Puisque $\deg(R) < p$ alors $R \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$. C'est-à-dire : chaque élément $B \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit d'une façon
 unique comme somme d'un élément de G et d'un autre de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.
 De plus on a : $G \cap \mathbb{K}_{p-1}[X] = \{0\}$. D'où : $G \oplus \mathbb{K}_{p-1}[X] = \mathbb{K}_n[X]$