

Série N 2 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 2

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

- (1) i) $\{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid (u_n)_n \text{ bornée}\}$. ii) $\{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid (u_n)_n \text{ monotone}\}$.
(2) $\{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid (u_n)_n \text{ convergente}\}$.
(3) $\{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid (u_n)_n \text{ arithmétique}\}$.
(4) i) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$. ii) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.

Corrigé

- 1 i) Sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. En effet,
* Cet ensemble est non vide
* La multiplication d'une suite bornée par un réel est une suite bornée
* La somme de deux suites bornées est une suite bornée
ii) Ce n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, car si on considère $(u_n)_n$ une suite croissante (donc monotone), la suite de terme général $v_n = -u_n$ est une suite décroissante (donc monotone), mais la somme des deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est une suite constante nulle (pas monotone).
- 2 Sous espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. En effet,
* Cet ensemble est non vide (suite nulle est convergente)
* La multiplication d'une suite convergente par un réel est une suite convergente.
* La somme de deux suites convergentes est une suite convergente.
- 3 Sous espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. En effet,
* Cet ensemble est non vide (suite nulle est arithmétique $u_n = u_0 + nr$ avec $u_0 = 0$ et $r = 0$).
* Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites arithmétiques et α un réel.
$$u_n + \alpha v_n = (u_0 + nr_1) + \alpha(v_0 + nr_2) = (u_0 + \alpha v_0) + n(r_1 + \alpha r_2)$$
- 4 i) Sous espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
ii) Ce n'est pas un sous espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.