



Algèbre 3 (SMIA).
Série II (2 séances).

Exercice 1. Déterminer lesquels des ensembles E_1 , E_2 , E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}. & E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\} \\ E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}. \\ E_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\} \end{aligned}$$

Exercice 2. Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

- (1) i) $\{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid (u_n)_n \text{ bornée}\}$. ii) $\{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid (u_n)_n \text{ monotone}\}$.
- (2) $\{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid (u_n)_n \text{ convergente}\}$.
- (3) $\{(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid (u_n)_n \text{ arithmétique}\}$.
- (4) i) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$. ii) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.

Exercice 3. a) Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F une partie de E formée des applications de la forme:

$$x \mapsto P(x) \cos x + Q(x) \sin x, \text{ avec } P \text{ et } Q \in \mathbb{R}[X]$$

Montrer que F est un sous espace vectoriel de E .

b) Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré $p \geq 1$. Montrer que l'ensemble $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer un supplémentaire de G .

Exercice 4. Soit $F = \left\{ f \in C([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$, $G = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}$.

Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 5. Pour $a \in \mathbb{C}$, on note f_a l'application définie sur $\mathbb{R}$ par: $f_a(x) = e^{ax}$.

1) Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(Indication: raisonner par récurrence sur le nombre n d'éléments d'une sous famille finie, multiplier par $e^{-a_{n+1}x}$ puis dériver).

2) En déduire que la famille $(g_a)_{a \in \mathbb{R}^+}$ où g_a est définie sur $\mathbb{R}$ par: $g_a(x) = \cos(ax)$ est libre dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercices supplémentaires.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrer que le système de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ constitue une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$,

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$

et $H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$.

- (1) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$.
- (2) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on note id_E l'identité sur E . On appelle projecteur tout endomorphisme p de E tel que

$$p^2 = p \circ p = p.$$

- a) Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\text{id}_E - p$ en est un.
- b) Etablir des relations entre les images et les noyaux de p et de $\text{id}_E - p$.
- c) Montrer que si p est un projecteur, alors $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont supplémentaires de E .

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, on note id_E l'identité sur E . Soit u un endomorphisme de E .

- (1) Montrer que si u est un projecteur alors $\text{id}_E - u$ est un projecteur. Vérifier aussi que $\text{Im } u = \{x \in E; u(x) = x\}$ et que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.
Un endomorphisme u de E est appelé involutif si $u \circ u = \text{id}_E$.
- (2) Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et $E = \text{Im}(\text{id}_E + u) \oplus \text{Im}(\text{id}_E - u)$.
Soit $E = F \oplus G$ et soit $x \in E$ qui s'écrit donc de façon unique $x = f + g$, $f \in F$, $g \in G$.
Soit $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$.
- (3) Montrer que u est involutif, $F = \{x \in E; u(x) = x\}$ et $G = \{x \in E; u(x) = -x\}$.
- (4) Montrer que si u est un projecteur, $2u - \text{id}_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.