

Série N 1 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 5

On considère le système suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + t = \lambda & L_1 \\ 2x + y - z = \lambda - 1 & L_2 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda & L_3 \\ (\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y - z = 3\lambda + a & L_4 \\ 3x - z + t = -\lambda^2 & L_5 \end{cases}$$

Changement de colonnes : t en première colonne.

$$\begin{cases} t + 3x + 2y - z = \lambda & L_1 \\ 2x + y - z = \lambda - 1 & L_2 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda & L_3 \\ (\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y - z = 3\lambda + a & L_4 \\ t + 3x - z = -\lambda^2 & L_5 \end{cases}$$

Effectuons l'opération suivante :

$$L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1$$

on obtient le système :

$$\begin{cases} t + 3x + 2y - z = \lambda & L'_1 \\ 2x + y - z = \lambda - 1 & L'_2 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda & L'_3 \\ (\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y - z = 3\lambda + a & L'_4 \\ 6x + 6y - 2z = \lambda(\lambda + 3) & L'_5 \end{cases}$$

Changement de colonne : z en premier à partir de L'_2

$$\begin{cases} t - z + 3x + 2y = \lambda & L'_1 \\ -z + 2x + y = \lambda - 1 & L'_2 \\ -2z + 5x + 4y = 2\lambda & L'_3 \\ -z + (\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y = 3\lambda + a & L'_4 \\ -2z + 6x + 6y = \lambda(\lambda + 3) & L'_5 \end{cases}$$

Nous effectuons les opérations suivantes :

$$L'_3 \leftarrow L'_3 - 2L'_2, \quad L'_4 \leftarrow L'_4 - L'_2 \quad \text{et} \quad L'_5 \leftarrow L'_5 - 2L'_2,$$

$$\begin{cases} t - z + 3x + 2y = \lambda & L''_1 \\ -z + 2x + y = \lambda - 1 & L''_2 \\ x + 2y = 2 & L''_3 \\ \lambda x + (\lambda + 1)y = 2\lambda + a + 1 & L''_4 \\ 2x + 4y = \lambda^2 + \lambda + 2 & L''_5 \end{cases}$$

* Si $\lambda = 0$: on obtient le système :

$$\begin{cases} t - z + 3x + 2y = 0 & L'''_1 \\ -z + 2x + y = -1 & L'''_2 \\ x + 2y = 2 & L'''_3 \\ y = a + 1 & L'''_4 \\ 2x + 4y = 2 & L'''_5 \end{cases}$$

D'après L'''_3 et L'''_5 : $1 = 2$, ce qui est impossible. D'où :

$$S_{0,a} = \emptyset.$$

* Si $\lambda \neq 0$: Nous effectuons les opérations suivantes :

$$L_4'' \leftarrow L_4'' - \lambda L_3'', \quad \text{et} \quad L_5'' \leftarrow L_5'' - 2L_3''$$

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} t & - & z & + & 3x & + & 2y & = & \lambda & L_1''' \\ & & - & z & + & 2x & + & y & = & \lambda - 1 & L_2''' \\ & & & & x & + & 2y & = & 2 & L_3''' \\ & & & & & & (1 - \lambda)y & = & a + 1 & L_4''' \\ & & & & & & 0 & = & \lambda^2 + \lambda - 2 & L_5''' \end{array} \right.$$

Puisque

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Alors l'équation L_5''' , donne :

$$\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2.$$

** Si $\lambda = 1$: Le système s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} t & - & z & + & 3x & + & 2y & = & 1 \\ & & - & z & + & 2x & + & y & = & 0 \\ & & & & x & + & 2y & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & a + 1 \end{array} \right.$$

*** Si $a = -1$, La solution est donnée par :

$$S_{1,-1} = \{(2 - 2\alpha, \alpha, 4 - 3\alpha, \alpha - 1) / \alpha \in \mathbb{R}\}$$

*** Si $a \neq -1$:

$$S_{1,a} = \emptyset$$

** Si $\lambda = -2$:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} t & - & z & + & 3x & + & 2y & = & -2 \\ & & - & z & + & 2x & + & y & = & -3 \\ & & & & x & + & 2y & = & 2 \\ & & & & & & 3y & = & a + 1 \end{array} \right.$$

Donc :

$$S_{-2,a} = \{(\frac{4-2a}{3}, \frac{a+1}{3}, 6-a, \frac{a-2}{3}) / a \in \mathbb{R}\}$$

** Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$:

$$S_{\lambda,a} = \emptyset.$$