Université Mohammed V. Année 2020-2021.
Faculté des sciences - Rabat
Département de Mathématiques.

Série N 1 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 3

On considère le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & (1-m)z & = & m+2 & L_1 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 & L_2 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 & L_3 \end{array}\right.$$

* Si $m=-1$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

On obtient la solution :

$$S_{-1}=\left\{\left(1,-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$$

* Si $m \neq -1$: $L_2 \longleftarrow L_2-(1+m)L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-2L_1$:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & - & (1-m)z & = & m+2 & L_1' \\ & - & (m+2)y & + & (m^2+1)z & = & -(m+1)(m+2) & L_2' \\ & - & (m+2)y & + & (2m+1)z & = & -(m+2) & L_3' \end{array}\right.$$

** Si $m=-2$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & - & 3z & = & 0 & L_1'' \\ & & & & 5z & = & 0 & L_2'' \\ & & & - & 3z & = & 0 & L_3'' \end{array}\right.$$

Ce qui implique

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où :

$$S_{-2}=\left\{\left(\alpha,-\alpha,0\right)/\alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

** Si $m \neq -2$: $L_3' \longleftarrow L_3'-L_2'$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & - & (1-m)z & = & m+2 & L_1'' \\ & & (m+2)y & - & (m^2+1)z & = & (m+1)(m+2) & L_2'' \\ & & & & m(2-m)z & = & m(m+2) & L_3'' \end{array}\right.$$

*** Si $m=0$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$

D'où :

$$S_0=\left\{\left(\alpha,\alpha,2\alpha-2\right)/\alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

*** Si $m \neq 0$: Le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & - & (1-m)z & = & m+2 & L_1''' \\ & & (m+2)y & - & (m^2+1)z & = & (m+1)(m+2) & L_2''' \\ & & & & (2-m)z & = & (m+2) & L_3''' \end{array}\right.$$

**** Si $m = 2$: D'après L_3''', on obtient $0 = 4$, d'où :

$$S_2 = \emptyset$$

**** Si $m \neq 2$:

$$S_m = \left\{ \left(\frac{m^2+m+1}{2-m}, \frac{m^2+1}{2-m}, \frac{m+2}{2-m} \right), \quad m \in \mathbb{R} \backslash \{-2, -1, 0, 2\} \right\}$$