

Série N 1 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 2

Soit $P(X) = a + bX + cX^2$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, avec a, b et c sont des réels.
Nous avons :

$$\begin{aligned}P(X) &= xP_1(X) + yP_2(X) + zP_3(X) \\&= x(1 + X - X^2) + y(1 - X + X^2) + z(-1 + X + X^2) \\&= (x + y - z) + (x - y + z)X + (-x + y + z)X^2\end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z &= a & L_1 \\ x - y + z &= b & L_2 \\ -x + y + z &= c & L_3 \end{cases}$$

Nous utilisons la méthode de Pivot de Gauss.

* Etape 1 : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\begin{cases} x + y - z &= a & L'_1 \\ -2y + 2z &= b - a & L'_2 \\ 2y &= a + c & L'_3 \end{cases}$$

* Etape 2 : Echange de colonnes associées à y et z :

$$\begin{cases} x - z + y &= a & L''_1 \\ 2z - 2y &= b - a & L''_2 \\ 2y &= a + c & L''_3 \end{cases}$$

D'où :

$$S = \left\{ \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2} \right) / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$