

Série N 1 - Corrigé
Algèbre 3 - Filière SMIA.

Exercice 1. 1. On considère le système suivant

$$(S_1) \begin{cases} x + y - z &= 0 & L_1 \\ x - y &= 0 & L_2 \\ x + 4y + z &= 0 & L_3 \end{cases}$$

A partir de l'équation L_2 , on a : $x = y$. On remplace dans les équations L_1 et L_3 , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - z &= 0 & L'_1 \\ 5x + z &= 0 & L'_3 \end{cases}$$

D'après L'_1 , on a : $z = 2x$. Ce qui donne en remplaçant dans L'_3 : $x = 0$. Donc : $y = z = 0$. D'où :

$$S = \{(0, 0, 0)\}.$$

2. On considère le système suivant :

$$(S_2) \begin{cases} 3x - y + 2z &= a & L_1 \\ -x + 2y - 3z &= b & L_2 \\ x + 2y + z &= c & L_3 \end{cases}$$

Nous utilisons la méthode de Pivot de Gauss.

* Etape 1 : Pour Simplifier, nous échangeons les lignes L_1 et L_3 pour que le pivot soit 1 :

$$\begin{cases} x + 2y + z &= c & L'_1 \\ -x + 2y - 3z &= b & L'_2 \\ 3x - y + 2z &= a & L'_3 \end{cases}$$

* Etape 2 : $L'_2 \leftarrow L'_2 + L'_1$ et $L'_3 \leftarrow L'_3 - 3L'_1$:

$$\begin{cases} x + 2y + z &= c & L''_1 \\ 4y - 2z &= b + c & L''_2 \\ -7y - z &= a - 3c & L''_3 \end{cases}$$

* Etape 3 : Echange de lignes L''_2 et L''_3 et de colonnes associées à y et z :

$$\begin{cases} x + z + 2y &= c & L'''_1 \\ z + 7y &= 3c - a & L'''_2 \\ -2z + 4y &= b + c & L'''_3 \end{cases}$$

* Etape 4 : $L'''_3 \leftarrow L'''_3 + 2L'''_2$:

$$\begin{cases} x + z + 2y &= c & L''''_1 \\ z + 7y &= 3c - a & L''''_2 \\ 18y &= b + 7c - 2a & L''''_3 \end{cases}$$

D'où :

$$S = \left\{ \left(\frac{8a + 5b - c}{18}, \frac{-2a + b + 7c}{18}, \frac{-4a - 7b + 5c}{18} \right) / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$