

Système linéaire méthode Pivot

→ Un système linéaire est un don d'un nombre fini d'équation linéaire :

telle que : (1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \text{ (équation 1)} \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \text{ (équation p)} \end{cases}$$

Les inconnues du système (1) sont $x_1, x_2, x_3, \dots$

a_{ij} est le coefficient avec $i \leq p$ & $j \leq n$

b_j est le j -ième membre du système avec $1 \leq j \leq n$

Pour résoudre le système il faut : * Montrer que S n'est pas vide
 → Il est soit réduit ou une angletou
 → Il est soit $\emptyset$ et l'ensemble infini.

Exemple

Soit le système :
$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 & (L_1) \\ 3x + 2y - 2z = 5 & (L_2) \\ -x + y - z = 2 & (L_3) \end{cases}$$

Notons L_1, L_2, L_3 les trois lignes de ce système. Remplaçons la ligne L_2 par $L_2' = 2L_2 - 3L_1$, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 & (L_1) \\ 7y - 7z = -2 & (L_2') \\ y - z = 8 & (L_3') \end{cases}$$

Remplaçons la nouvelle ligne L_3' par $L_3'' = -7L_3' + L_2'$, on a alors :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 & (L_1) \\ 7y - 7z = -2 & (L_2') \\ 0 = 58 & (L_3'') \end{cases}$$

Ce qui est impossible. Par conséquent le système proposé n'a pas de solution $S = \emptyset$.

Remarque : Dans ce cas on a obtenu $S = \emptyset$ mais obtenu l'ensemble de solution par exemple $S = \{(2, 4, -1)\}$. Ainsi le système peut admettre une infinité de solution qui s'écrivent sous la forme paramétrique, le paramètre étant la variable libre t .

→ La méthode de pivot est basée sur les propriétés des systèmes linéaires. Elle permet à la fois d'assurer l'existence de solutions mais aussi la détermination.

Opération élémentaire (Méthode Pivot / en système linéaire) :

- modifier l'ordre des équations pour que le pivot du système soit non nul. $a_{ii} \neq 0$
- éliminer les coefficients $a_{21} \dots a_{p1}$ cette méthode consiste à remplacer les lignes (multiplication / addition) ...

Remarque

Si en appliquant la méthode du pivot, nous obtenons une équation de forme $0 = b$, avec b non nul, nous pouvons affirmer que le système n'a pas de solution.

Système échelonné

Le nombre de coefficients nul amenant une ligne est strictement ligne après ligne

Système échelonné peut
 ① + ② le pivot est coefficient non nul d'une ligne vaut 1
 ③ est c'est la seule élément non nul de la colonne.

linéaire sont le nombre d'équations

Tout système homogène d'équation linéaires est strictement plus grand que le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations

Tous les équations doit être égal à 0 d'où $b_1 = \dots = b_n = 0$
 le système équivalent s'il ont le même ensemble de solutions.

Condition

si $(P_1) \perp (P_2)$ donc $S_1 = \{u\}$
 si $(P_1) \parallel (P_2)$ donc $S_1 = \emptyset$
 si (P_1) confondue (P_2) donc $S_1 = +\infty$

Remarque

Dans les exercices.

exemple

$$\begin{cases} u + 2y + z = c & L_1^N \\ 4y - 2z = b + c & L_2^N \\ -7y - z = a - 3c & L_3^N \end{cases}$$

on peut faire échange de la ligne L_2^N et L_3^N et de colonnes y et z .

on obtient

$$\begin{cases} u + 2y + z = c & L_1^N \\ z + 7y = 3c - a & L_2^N \\ -2z + 4y = b + c & L_3^N \end{cases}$$

on veut changer le paramètre a fait $(L_2^N \leftarrow L_2^N + L_3^N)$
 par $L_2^N \leftarrow L_2^N + L_3^N$

$L_i \mapsto L_j$ } $\Rightarrow$ linéaire en u & linéaire en v
 équivalent

Chapitre 2 : Espace vectoriel

* Définition d'un espace vectoriel : $(E, +, \cdot)$ est un ensemble muni d'une LCIE

$\rightarrow K$ un corps (avec $K = \mathbb{R}$) :
 E un ensemble
 ou a $\forall h \in K$ et $u, v \in E$

• LCI : $E \times E \rightarrow E$
 $(u, v) \mapsto u + v$

• LCE : $K \times E \rightarrow E$
 $(h, u) \mapsto h \cdot u$

Conditions pour que
 E soit un K -espace
 vectoriel sont :

- (1) LCI (+)
- commutativité
 $u + v = v + u$
 - associativité
 $u + (v + w) = (u + v) + w$
 - élément neutre

- (2) LCE (La multiplication par scalaire)
- élément neutre
 $1 \cdot u = u$
 - associativité + commutativité
 $h \cdot (u \cdot p) = (h \cdot p) \cdot u$
 $h \cdot (u + v) = h \cdot u + h \cdot v$

(Vecteur) = $0_E \in E$
 $\leftarrow u + 0_E = u$

- symétrie
 $u + u' = 0_E$
 $(u, y) \mapsto (-u, -y)$

• Les éléments de E sont des vecteurs (u, v)
 • Les éléments de K sont des scalaires (h, p)
 • $K = \mathbb{R}$; $E = \mathbb{R}^2$