# Chapitre II : Espaces vectoriels.

## 1_ Généralités :

### 1.1_ Structure d'espace vectoriel :

Définition 3 : on appelle espace vectoriel sur K ou encore K_espace vectoriel, tout ensemble E muni de deux lois :

1_ Une loi interne appelée addition, notée + telle que $(E;+)$ groupe abélien.

2_ Une loi externe qui à tout couple $(\lambda;x) \in K \times E$ fait correspondre un élément de E noté $\lambda.x$, cette vérifiant les quatres propriétés suivantes :

a_ $\forall x \in E$ $\quad 1.x = x$

b_ $\forall \lambda \in K$ $\quad \forall x, y \in E$ $\quad \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda y$

c_ $\forall \lambda, \mu \in K$ $\quad \forall x \in E$ $\quad (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$

d_ $\forall \lambda; \mu \in K$ $\quad \forall x \in E$ $\quad (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$

Les éléments de E s'appellent vecteurs, ceux de K scalaires.

Calcul dans un espace vectoriel :

Proposition 1 :

1_ $\forall x; y \in E, \forall \lambda \in K, \quad \lambda.(x-y) = \lambda.x - \lambda.y$

2_ $\forall \lambda \in K, \quad \lambda.0 = 0$

3_ $\forall y \in E, \lambda \in K, \quad \lambda.(-y) = -\lambda.y$

4_ $\forall \lambda; \mu \in K, \forall x \in E, \quad (\lambda-\mu).x = \lambda.x - \mu.x$

5_ $\forall \mu \in K, \forall x \in E, (-\mu).x = -\mu.x$

6 _ $\forall x \in E, 0.x = 0$

7 _ $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \lambda . x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$

## 1.2 - Sous-espaces vectoriels :

Définition 4: soit $(E; +; .)$ un espace vectoriel sur $K$ et $F$ une Partie non vide de $E$. On dira que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si : 1 - $F$ est stable pour les deux lois $+$ et $.$

2 - $F$ muni des deux lois induites $+$ et $.$ est un $K$-espace vectoriel.

Théorème 1 : soit $F$ une partie non vide d'un $K$-espace vectoriel $E$.

$$F \text{ est un s.e.v de } E \Leftrightarrow \forall x, y \in E ; \forall \lambda, \mu \in K ; \lambda . x + \mu . y \in F.$$

## 1.3 - Sous-espace engendré par une partie :

Définition 5 : Soit $(x_1; \dots; x_n)$ un système fini de vecteurs d'un $K$-espace vectoriel $E$. Un vecteur $x \in E$ est dit combinaison linéaire des vecteurs $x_1; \dots; x_n$ si l'on peut trouver un système $(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$ de scalaires, tel que : $x = \lambda_1 . x_1 + \dots + \lambda_n . x_n$.

Les scalaires $\lambda_i$ sont nommés coefficients de la combinaison linéaire $x$.

Théorème 2 : soit $(x_1; \dots; x_n)$ un système fini de vecteurs d'un $K$-espace vectoriel $E$. l'ensemble $F$ des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1; \dots; x_n$ est un s.e.v de $E$ ; c'est le plus petit s.e.v de $E$ contenant les vecteurs $x_1; \dots; x_n$. $F$ est sous-espace engendré par les vecteurs $x_1; \dots; x_n$ et il est noté : $F = Vect(x_1; \dots; x_n) = \left\{ \lambda_1 . x_1 + \dots + \lambda_n . x_n : \lambda_1 \dots \lambda_n \in K^n \right\}$

**Définition 6:** Un système fini $(x_1;\dots;x_n)$ de vecteurs d'un K-espace vectoriel E est dit générateur de E si $E = Vect(x_1;\dots;x_n)$:

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1;\dots;\lambda_n \in K, / \; x = \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n.$$

**Théorème 3:** Soit A une partie d'un K-espace vectoriel E. l'ensemble H des combinaisons linéaires finies d'éléments de A est s.e.v de E; c'est le plus petit s.e.v de E contenant A. H est dit sous-espace engendré par la partie A, il est noté: $Vect(A) = \{\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n : x_1 \dots x_n \in A \;\; n \geq 1\}$

## 1.4- Partie libre - Partie liée:

**Définition 7:** 1- On dit qu'un système fini $(x_1;\dots;x_n)$ de vecteurs d'un K-espace vectoriel E est libre si toute combinaison linéaire de $x_1;\dots;x_n$ est triviale: $\lambda_1;\dots\lambda_n \in K$: $\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

2- On dit qu'un système fini $(x_1;\dots;x_n)$ de vecteurs d'un K-espace vectoriel E est lié s'il n'est pas libre. ce qui revient à dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1;\dots;\lambda_n$ non tous nuls tels que: $\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0$

**Propriété 1:** 1- Tout vecteur non nul est libre

2- Tout système contenu dans un système fini libre est libre.

3- Tout système contenant le vecteur nul est lié

4- Tout système fini contenant un système lié est lié.

**Proposition 2:** soit E un K-espace vectoriel. le système $(x_1;\dots;x_n)$ est lié, si et seulement si, l'un au moins des vecteurs $x_i$ s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Définition 8 : 1 _ On dit qu'une partie A d'un K_espace vectoriel E est libre si tout système fini d'éléments distincts de A est libre, càd : $\forall n \geq 1; \forall x_1; \ldots; x_n \in A$, $\forall \lambda_1; \ldots; \lambda_n \in K$ tels que $\lambda_1 . x_1 + \ldots + \lambda_n . x_n = 0$, on a : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

2 _ On dit qu'une partie A de E est liée si elle n'est pas. Autrement dit, il existe un système fini de vecteurs de A qui soit lié.

1.5_ Somme de sous_espaces vectoriels :

Définition 9 : soit E un K_espace vectoriels, de dimention finie ou non, F et G deux sous_espaces vectoriels de E. On appelle somme de F et G l'ensemble, noté $F+G$, défini par : $\underbrace{F+G}_{\text{somme}} = \{ z \in E / \exists x \in F, y \in G, z = x + y \}$

Proposition 3 : La $F+G$ de deux s.e.v d'un K_espace vectoriel E est un s.e.v de E. De plus c'est le plus petit s.e.v de E contenant $F \cup G$.

Définition 10 : soit E un K espace vectoriel et F, G deux s.e.v de E. On dit que la somme $F+G$ est directe et on note $F \oplus G$, si tout élément de $F+G$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Proposition 4 : soit E un K_espace vectoriel et F, G deux s.e.v de E.

$F+G$ est directe $\Leftrightarrow F \cap G = \{0\} \Leftrightarrow x+y=0$ avec $x \in F$ et $y \in G \Rightarrow x = y = 0$

Définition 11 : soit E un K_espace vectoriel et F, G deux s.e.v de E. On dit F et G sont supplémentaires, et on not $E = F \oplus G$, si tout élément de E s'écrit d'une manière unique sous la forme $x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Définition 12 : soit E un K_espace vectoriel et soit F un s.e.v de E. On appelle supplémentaire de F tout s.e.v G de E vérifiant $E = F \oplus G$.

## 2 - Les Applications Linéaires :

### 2.1 - Généralités :

Définition 13 : soient E et E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application de E dans E'. On dit que f est linéaire si : 1 - $f(v+w) = f(v) + f(w)$ ; $\forall v, w \in E$

2 - $f(\lambda . v) = \lambda . f(v)$ ; $\forall v \in E$ ; $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Si de plus f est bijective, f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 3 : Pour toute application linéaire f, on a $f(0) = 0$ puisque f est un homomorphisme de groupes. (On a : $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$).

Image et noyau d'une application linéaire :

Proposition 5 : soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(F)$ est un s.e.v de E'. En particulier $f(E)$ est un s.e.v de E' appelé image de f noté $\operatorname{Im} f$.

Remarque 4 : On peut montrer que l'image réciproque d'un s.e.v F' de E' est un s.e.v de E

Proposition 6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E; E')$, $\operatorname{Ker} f = \{x \in E : f(x) = 0\}$ est s.e.v de E, appelé noyau de f

Proposition 7 : f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

Proposition 8 : soit $f \in \mathcal{L}(E; E')$ et $(v_1; \dots; v_n)$ un système de vecteurs de E.

1 - Si f est injective et le système $(v_1; \dots; v_n)$ est libre dans E, Alors le système $(f(v_1); \dots; f(v_n))$ est libre dans E'. Si f est injective et A une partie libre de E, alors $f(A)$ est libre dans E'

2 - Si f est surjective et le système $(v_1; \dots; v_n)$ est générateur de E, alors le système $(f(v_1); \dots; f(v_n))$ est générateur de E'. Plus généralement, si f est est surjective et A une partie génératrice de E, Alors $f(A)$ engendre E'

En Particulier si $f$ est bijective, l'image d'une base de $E$ est une base de $E'$.

2.2- Structure des endomorphisme : $E, E'; E''$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Proposition 9 : 1- $\mathcal{L}(E;E')$ muni des loi $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ et $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

$(f,g \in \mathcal{L}(E,E'), \lambda \in K, x \in E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2- Si $f \in \mathcal{L}(E;E')$, et $g \in \mathcal{L}(E';E'')$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E;E'')$

3- pour tout $f, h \in \mathcal{L}(E,E')$; $g, k \in \mathcal{L}(E',E'')$; $\lambda \in \mathbb{K}$ :

a- $g \circ (f+h) = g \circ f + g \circ h$ b- $(g+k) \circ f = g \circ f + k \circ f$ c- $g \circ (\lambda f) = \lambda g \circ f$.

4- Si $f$ est bijective, alors $f^{-1}$ est linéaire.

Anneau $\mathcal{L}(E)$- Groupe $G\ell(E)$ :

Théorème 4 : L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de $E$ muni des opérations

$(f,g) \to f+g$ et $(f,g) \to f \circ g$ a une structure d'anneau unitaire.

Théorème 5 : L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel $E$ est pour la composition des applications un groupe, appelé ~~des endomorphismes est ...~~ groupe linéaire de $E$ et noté $G\ell(E)$.

Algèbre $\mathcal{L}(E)$- Application : Les projecteurs :

Théorème 6 : L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ muni des opérations :

1- $(f,g) \to f+g$ 2- $(\lambda, f) \to \lambda . f$ 3- $(f,g) \to f \circ g$.

a une structure d'espace vectoriel pour les lois 1 et 2 et de plus

$\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$ on dit que $\mathcal{L}(E)$ a une structure d'algèbre sur $\mathbb{K}$.

Définition 14 :

Un endomorphisme $p$ de $E$ est appelé projecteur si $p \circ p = p$.

# Chapitre III : Espaces Vectoriels de Dimension Finie.

## 1- Généralités:

Définition 15: 1- On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel engendré par un système fini de vecteurs. Dans le cas contraire on dit que l'espace vectoriel est de dimension infinie.

2- Un système $(u_1; \dots; u_n)$ de vecteurs d'un IK-espace vectoriel E est dit base de E si $(u_1; \dots; u_n)$ est libre et générateur.

Remarque 5: il ne faudrait pas croire que tous les espaces vectoriels sur un corps IK soient de dimension finie.

Lemme 1: soit E un IK-espace vectoriel engendré par le système $(e_1, \dots; e_n)$ et soit $(f_1; \dots; f_m)$ un système de vecteurs de E. Si $m > n$ alors $(f_1; \dots; f_m)$ est lié.

Théorème 7 : 1- Tout IK-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base. Plus précisément, tout système générateur fini contient au moins une base.

2- Toutes les bases d'un IK-espace vectoriel E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de E et se note dim E.

Théorème 8: soit E un IK-espace vectoriel de dimension finie n.

1- Tout système libre de E ayant n vecteurs est une base.

2- Tout système générateur de E ayant n vecteurs est une base de E.

3- soit $F \subset E$ un s.e.v de E. Alors F est de dimension finie; $\dim F \leq \dim E$ et il y a égalité si et seulement si $F = E$.

Théorème 9 : soit E un espace vectoriel de base $(e_1; \dots; e_n)$ et soit $(f_1; \dots; f_m)$ un système libre. Alors il existe $n - m$ vecteurs parmi les vecteurs $e_1; \dots; e_n$ tels que le système constitué de ces $n - m$ vecteurs et des vecteurs vecteurs $f_1; \dots; f_m$ forme une base de E

## 2 - Rang d'un système fini de vecteurs :

Définition 16 : soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension $n$ et soit $S = (v_1; \dots; v_p)$ un système de $p$ vecteurs de $E$ $(p \leq n)$. On appelle rang du système de vecteurs $S = (v_1; \dots; v_p)$ et on note par $rg(S)$, la dimension du s.e.v engendré par ce système $rg(S) = \dim Vect(v_1; \dots; v_p)$

Proposition 10 : Le rang d'un système de vecteurs est le nombre maximum de vecteurs libres que l'on peut extraire de ce système.

### 2.1 - Somme vectorielle :

Proposition 11 : Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Tout s.e.v F de E admet au moins un supplémentaire G ; de plus tous les supplémentaires ont pour dimension $\dim E - \dim F$.

Proposition 12 : soient F et G deux s.e.v de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors $F + G$ est de dimension finie et on a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Corollaire 1 : soient F et G deux s.e.v de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors E est somme directe de F et G si et seulement si $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0\}$.

### 2.2 - Applications linéaires en dimension finie :

Proposition 13 : soit $E, E'$ deux espaces vectoriels, $E$ étant de dimension finie. soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $E'$. Alors $\mathrm{Im} f$ est un s.e.v de dimension finie de $E'$. Sa dimension est appelée le rang de $f$ ($rg(f) = \dim \mathrm{Im} f$).

Théorème 10 : Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si, ils ont la même dimension.

Corollaire 2 : soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, alors $E$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $\dim E = n$.

Théorème 11 : (Théorème de la dimension) : soient $E$ et $E'$ deux espace vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E; E')$, Alors $\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$.

Corollaire 3 : $f \in \mathcal{L}(E; E')$, $E$ et $E'$ étant de même dimension, alors :

$f$ est injective $\Leftrightarrow$ $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $f$ est bijective.

Remarque 6 : 1- Ce résultat est faux en dimension infinie. L'application dérivation $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme $P$ fait correspondre $P'$ est surjective mais non injective.

2- Une application linéaire $f$ est parfaitement définie si l'on connait l'image des vecteurs d'une base, car d'après la linéarité de $f$ on a :

$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i . e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, donc si on connait $f(e_1); \dots ; f(e_n)$; $f$ est connue en tout vecteurs de $E$.

Théorème 12 : soient $E$ et $E'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $\dim E = n$ et $\dim E' = m$ alors $\dim \mathcal{L}(E; E') = n.m$