

Cours d'algèbre 3

Filière : SMIA

Matrices

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed V.
Faculté des sciences
Dep. de Mathématiques -Rabat.

22 mai 2021

Définition

- Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$
- A est dite de taille $n \times p$ si elle a n lignes et p colonnes
- Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A
- $a_{i,j}$ est le coefficient en i -ème ligne et j -ème colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

ou $A = (a_{i,j})$. Notation $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices

- $n = p$: matrice carrée, on note $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la diagonale principale

- $n = 1$: matrice ligne ou vecteur ligne

$$A = (a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,p})$$

- $p = 1$: matrice colonne ou vecteur colonne $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$

- matrice nulle $0_{n,p}$ ou 0 : matrice dont tous les coefficients sont nuls

A et B deux matrices de même taille $n \times p$

Définition (Somme de deux matrices)

La somme $C = A + B$ est la matrice $n \times p$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Exemples

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Par contre si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ alors $A + B'$ n'est pas définie

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)

Le produit de $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice $\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})$

Exemples

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha = 2 \text{ alors } \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $-A = (-1)A$ est l'opposée de A
- La différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$

Exemples

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soient $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Proposition

- ① $A + B = B + A$: la somme est commutative
- ② $A + (B + C) = (A + B) + C$: la somme est associative
- ③ $A + 0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition
- ④ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- ⑤ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Définition (Produit de deux matrices)

$A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$ Alors

$C = AB$ est une matrice $n \times q$ définie par $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \vdots \\ - & - & - & c_{ij} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow B \\ \leftarrow AB \end{matrix}$$

Exemples

$$u = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice 1×1

$$u \times v = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \right)$$

Ce nombre s'appelle le produit scalaire des vecteurs u et v

- ❶ $AB \neq BA$: le produit n'est pas commutatif en général

Exemples

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

- ❷ $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ❸ $AB = AC$ n'implique pas $B = C$

Proposition

- ① $A(BC) = (AB)C$
- ② $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$
- ③ $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$

La matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité, notée I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition

Si A est une matrice $n \times p$, alors : $I_n \cdot A = A \cdot I_p = A$

Puissance d'une matrice :

Dans $M_n(\mathbb{K})$ la multiplication des matrices est une opération interne :

$$\text{si } A, B \in M_n(\mathbb{K}) \quad \text{alors } A \times B \in M_n(\mathbb{K})$$

- En particulier : $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, ...
- $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$
- $A^0 = I_n$

Exemples

Calculons A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- On calcule A^2 , A^3 et A^4 : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

- On conjecture la formule $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$

Exemples

Démontrons par récurrence $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$

- 1 Vrai pour $p = 0$
- 2 On suppose la formule vraie pour un entier p Alors
 $A^{p+1} = A^p \times A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}$$

- 3 D'après le principe de récurrence, la propriété est démontrée

Rq : Comme la multiplication n'est pas commutative

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \\ \neq A^2 + 2AB + B^2$$

Proposition

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$

Alors pour tout entier $p \geq 0$

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme

Exemples

Calculons A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- On pose $N = A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $N^4 = 0$, la matrice N est dite nilpotente

Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

S'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

alors A est dite inversible. On appelle B l'inverse de A , noté A^{-1}

- Il suffit en fait de vérifier $AB = I_n$ ou bien $BA = I_n$
- Quand A est inversible, pour $p \in \mathbb{N}$, on note

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}$$

- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$

Exemples

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Cherchons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$ et $BA = I_2$
- Or $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$
- $AB = I_2 \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$
$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$
- Il y a une unique solution $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- Pour prouver que $B = A^{-1}$, il faut montrer $BA = I_2$
- La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

En effet, pour $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 5b & 0 \\ 3c + 5d & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples

- I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$, par l'égalité $I_n I_n = I_n$
- La matrice nulle 0_n n'est pas inversible :
pour tout $B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $B0_n = 0_n \neq I_n$

Proposition

Si A est inversible, alors son inverse est unique

En effet :

Supposons qu'il existe B_1 telle que $AB_1 = B_1A = I_n$ et B_2 telle que $AB_2 = B_2A = I_n$

- Calculons $B_2(AB_1)$
- D'une part, $B_2(AB_1) = B_2I_n = B_2$
- D'autre part, $B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = I_nB_1 = B_1$
- Donc $B_1 = B_2$

Proposition

Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

Proposition

A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

En effet :

- Montrons que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$
 $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IdB = B^{-1}B = I_n$
- De même $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

Rappel : en général $AC = BC$ n'implique pas $A = B$

Proposition

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$

Si $AC = BC$ alors $A = B$

En effet :

$$\begin{aligned} AC = BC &\implies (AC)C^{-1} = (BC)C^{-1} \\ &\implies A(CC^{-1}) = B(CC^{-1}) \\ &\implies AI_n = BI_n \implies A = B \end{aligned}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2

Proposition

Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

En effet :

- on pose $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- on vérifie alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- de même $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode pour inverser A

- par des opérations élémentaires sur les lignes de A , transformer A en la matrice identité I_n
- faire simultanément les mêmes opérations sur I_n
- la fin, A est transformée en I_n , et I_n est transformée en A^{-1}

On forme le tableau

$$(A \mid I_n) \longrightarrow (I_n \mid B) = (I_n \mid A^{-1})$$

Opérations élémentaires sur les lignes

- 1 $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: multiplier une ligne par un réel non nul
- 2 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ ($j \neq i$) : ajouter la ligne L_j un multiple de L_i
- 3 $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger deux lignes

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Voici la matrice augmentée

$$\begin{aligned} (A \mid I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

N'oubliez pas de vérifier $A \times A^{-1} = I_3$

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$

- A est triangulaire inférieure si ses éléments *au-dessus* de la diagonale sont nuls : $i < j \implies a_{ij} = 0$
- A est triangulaire supérieure si ses éléments *en-dessous* de la diagonale sont nuls : $i > j \implies a_{ij} = 0$

Exemples (Matrices triangulaires)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème

Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls

Une matrice qui est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est une matrice diagonale : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$

Exemples (Matrices diagonales)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemples (Puissances d'une matrice diagonale)

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \implies D^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix}$$

Définition (Matrice transposée)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times p$. La matrice transposée de A , notée A^T est la matrice de taille $p \times n$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \mapsto A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Autrement dit : le coefficient a_{ij} est la place (j, i) dans A^T

Ou encore : la i -ème ligne de A devient la i -ème colonne de A^T

Notation : La transposée de la matrice A se note aussi tA

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ -2 \ 5)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Théorème

- ❶ $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ❷ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- ❸ $(A^T)^T = A$
- ❹ $(AB)^T = B^T A^T$
- ❺ Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

La trace

- Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille $n \times n$
- Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont les éléments diagonaux
- La diagonale principale est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

La trace de la matrice A est la somme des éléments diagonaux :
 $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

Exemples

- Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ alors $tr(A) = 2 + 5 = 7$
- Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ alors $tr(B) = 1 + 2 - 10 = -7$

Théorème

Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors

- ❶ $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- ❷ $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$
- ❸ $tr(A^T) = tr(A)$
- ❹ $tr(AB) = tr(BA)$

$$A \rightarrow tr(A)$$

est une application linéaire

Définition

Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale sa transposée, c'est-à-dire si $A = A^T$

Autrement dit si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$

Les coefficients sont donc symétriques par rapport la diagonale

Exemples

Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition

Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est antisymétrique si $A^T = -A$

Autrement dit si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$

Exemples

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls (car en prenant $i = j$, on a $a_{ii} = -a_{ii}$)

Rang d'une famille de vecteurs :

- E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
- $\{v_1, \dots, v_p\}$ des vecteurs de E
- $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ est de dimension finie

Definition

Le rang de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_p$

$$rg(v_1, \dots, v_p) = \dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$$

Proposition

- 1 $0 \leq rg(v_1, \dots, v_p) \leq p$
- 2 $rg(v_1, \dots, v_p) \leq \dim E$

Exemple :

Quel est le rang de $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Dans $\mathbb{R}^4$ donc $rg(v_1, v_2, v_3) \leq 4$
- 3 vecteurs donc $rg(v_1, v_2, v_3) \leq 3$
- $v_1 \neq 0$ donc $rg(v_1, v_2, v_3) \geq 1$
- $rg(v_1, v_2, v_3) \geq rg(v_1, v_2) = 2$ car v_1 et v_2 pas colinéaires
- La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée ?
- Résoudre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$
- On trouve $v_1 - v_2 + v_3 = 0$, la famille est donc liée
- Ainsi $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$
- $rg(v_1, v_2, v_3) = \dim Vect(v_1, v_2, v_3) = 2$

Rang d'une matrice :

Définition

Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes

Exemples

Calcul du rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$$

- C'est le rang des vecteurs de $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Tous ces vecteurs sont colinéaires v_1
- Donc $rg\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = 1$
- Ainsi $rgA = 1$

Proposition

Le rang d'une matrice est conservé par les opérations élémentaires suivantes sur les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$:

- ❶ $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: on multiplie une colonne par un scalaire non nul
- ❷ $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on ajoute la colonne C_j un multiple d'une autre colonne C_j
- ❸ $C_i \leftrightarrow C_j$: on échange deux colonnes

Méthodologie. Comment calculer le rang d'une matrice ?

- Méthode de Gauss sur les colonnes de la matrice A
- Opérations élémentaires
 - $C_i \leftarrow \lambda C_i$
 - $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$
 - $C_i \leftrightarrow C_j$
- Transformer la matrice A en une matrice échelonnée
- Le rang de la matrice est le nombre de colonnes non nulles

Exemples

Quel est le rang de la famille des 5 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1, \quad C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1, \quad C_5 \leftarrow C_5 - 3C_1$$

Exemples

$$C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2, C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2 \text{ et } C_5 \leftarrow C_5 + 5C_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & -11 & -22 \\ 1 & -6 & -16 & -16 & -32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \text{ et } C_5 \leftarrow C_5 - 2C_3 \text{ Alors}$$

- $rg\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 3$

- $Vect(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \\ -16 \end{pmatrix}\right)$

Rang et matrice inversible

Théorème

Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n

Rang engendré par les vecteurs lignes : Une matrice A est une superposition de vecteurs lignes $(w_1, \dots, w_n)$

Proposition

$$rgA = \dim \text{Vect}(w_1, \dots, w_n)$$

- l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes sont de même dimension
- $rgA = rgA^T$
- le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée