

Cours d'algèbre 3-Espaces vectoriels

Filière : SMIA

Semaine du 07-04-2021

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed V.
Faculté des sciences
Dep. de Mathématiques -Rabat.

24 avril 2021

Sous-espace engendré par famille vecteurs

- Soient $v_1, v_2, \dots, v_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E ($p \geq 1$)
- Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbb{K}$

Definition

- Le vecteur

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$$

est une **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$

- Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les **coefficients** de la combinaison linéaire

Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E

Théorème

- *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E*
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $v_1, \dots, v_n$*

C'est le **sous-espace engendré par** $v_1, \dots, v_n$, noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

$$u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

❶ **Droite vectorielle** $\text{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u \quad (u \neq 0_E)$

❷ $\text{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$

Si u et v ne sont pas colinéaires, c'est un **plan vectoriel**

❸ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathcal{P} = \text{Vect}(u, v)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v) &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda u + \mu v \quad \text{pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases} \end{aligned}$$

Équation cartésienne : $(x - 2y + z = 0)$

❹ $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f_0(x) = 1, f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$

$$\text{Vect}(f_0, f_1, f_2) = \{f \mid f(x) = ax^2 + bx + c\} = \mathbb{R}_2[x]$$

Definition

Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E est une **famille libre** (ou **linéairement indépendante**) si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \dots \quad \lambda_p = 0$$

Remarque

- Si la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E n'est pas libre, on dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**
- Dans ce cas, il existe une combinaison linéaire nulle de $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ **avec au moins un coefficient non nul**

Exemple

- Dans $\mathbb{R}^3$, soit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Est-ce une famille libre ou liée ?
- Posons

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Exemple

- Après réduction de Gauss

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

le système a une infinité de solutions

- Par exemple $\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$
- $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est donc une famille liée

Exemple

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ou liée ?
- $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$
 $\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$
- On résout ce système et on trouve comme unique solution
 $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0$
- La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une famille libre

Exemple

- Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{aligned}P_1(X) &= 1 - X \\P_2(X) &= 5 + 3X - 2X^2 \\P_3(X) &= 1 + 3X - X^2\end{aligned}$$

- $3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0$
- $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une famille liée

Proposition

La famille $\{v_1, v_2\}$ est liée si et seulement si v_1 est un multiple de v_2 ou bien v_2 est un multiple de v_1

Démonstration.

- Si $\{v_1, v_2\}$ est liée
 - il existe une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ avec au moins un coefficient non nul
 - Si $\lambda_1 \neq 0$, $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ et v_1 est un multiple de v_2
 - Si $\lambda_2 \neq 0$, $v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} v_1$ et v_2 est un multiple de v_1
- Réciproquement
 - si v_1 est un multiple de v_2 , il existe μ tel que $v_1 = \mu v_2$
 - donc $1v_1 + (-\mu)v_2 = 0$
 - la famille $\{v_1, v_2\}$ est liée
 - Mme conclusion si c'est v_2 qui est un multiple de v_1



Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Théorème

Une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de $p \geq 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$

Proposition

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{F}$ contient plus de n éléments (c'est-à-dire $p > n$), alors $\mathcal{F}$ est une famille liée

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

Definition

Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E . La famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une **famille génératrice** de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_p$.

Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ **engendre** l'espace vectoriel E .

Proposition

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille génératrice de E . Alors $\mathcal{F}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_q\}$ est aussi une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{F}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}'$.

Nous chercherons bientôt à avoir un nombre minimal de générateurs. Voici une proposition sur la réduction d'une famille génératrice.

Proposition

Si la famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ engendre E et si l'un des vecteurs, par exemple v_p , est combinaison linéaire des autres, alors la famille $\{v_1, \dots, v_p\} \setminus \{v_p\} = \{v_1, \dots, v_{p-1}\}$ est encore une famille génératrice de E .

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Definition

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice

Théorème

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de l'espace vectoriel E . Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

Exemple

① $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^2$

② $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$

③ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment la **base canonique**
de $\mathbb{R}^3$

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

❶ $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

❷ $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

❶ $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_1 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_2 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = a_3 \end{cases}$$

Exemple

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

② $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

- Les deux systèmes ont la mme matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- A est inversible
- Le premier système admet une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ quel que soit (a_1, a_2, a_3)
- Le second système admet pour seule solution $(0, 0, 0)$
- Conclusion : $\mathcal{B}$ est une famille génératrice et libre : c'est une base

Exemple

① $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$

② $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ base de $\mathbb{K}^n$

① $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

② $(1, 1 + X, 1 + X + X^2, \dots, 1 + X + X^2 + \dots + X^n)$ autre base de $\mathbb{R}_n[X]$

Théorème (d'existence d'une base)

Tout espace vectoriel admettant une famille finie génératrice admet une base

Théorème (de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel admettant une famille génératrice finie

- 1 Toute famille libre $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base.
C'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ soit une famille libre et génératrice de E
- 2 De toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut extraire une base de E .
C'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{B}$ soit une famille libre et génératrice de E

Théorème

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de E . Alors il existe un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ soit une base de E

Exemple

$$P_1(X) = 1$$

$$P_2(X) = X$$

$$P_3(X) = X + 1$$

$$P_4(X) = 1 + X^3$$

$$P_5(X) = X - X^3$$

$$E = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$$

$$\mathcal{G} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$$

$$\mathcal{L} = \emptyset$$

Cherchons $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{F}$ soit une base de E

- Étape 0. $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice, on passe à l'étape suivante
- Étape 1. $\mathcal{L} \cup \{P_1\} = \{P_1\}$ famille libre mais pas génératrice
- Étape 2. $\{P_1, P_2\}$ est une famille libre mais pas génératrice
- Étape 3.
 - $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille liée car $P_3 = P_1 + P_2$. P_3 est exclu
 - $\{P_1, P_2, P_4\}$ est une famille libre et aussi une famille génératrice car $P_5 = P_1 + P_2 - P_4$
 - l'algorithme s'arrête et $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_4\}$ est une base de E