

Cours d'algèbre 3-Espaces vectoriels

Filière : SMIA

Semaine du 19-05-2021

Hanine Abdelouahab

Université Mohammed V.
Faculté des sciences
Dep. de Mathématiques -Rabat.

19 mai 2021

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Le **noyau** de f , noté $\text{Ker}(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}.$$

L'**image** de f , noté $\text{Im}f$, est le sous ensemble de F :
 $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire alors :

- $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- $\text{Im}f$ est un sous-espace vectoriel de F .

Théorème (Caractérisation des applications linéaires injectives)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire alors :

- f injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im}f = F$.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

L'ensemble des applications de E dans F , noté $\mathcal{F}(E, F)$, peut être muni d'une loi de composition interne $(+)$ et d'une loi de composition externe $(\cdot)$, définies par : $f, g \in \mathcal{F}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Vocabulaire :** - $\mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes.
- Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{K}$..

- Une application linéaire bijective de E sur F est appelée **isomorphisme** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits **isomorphes**.
- Un endomorphisme bijectif de E (application linéaire bijective de E dans E) est appelé **automorphisme** de E .

Proposition (Linéarité de l'application réciproque)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E sur F , alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

Existence d'une base

Théorème (d'existence d'une base)

Tout espace vectoriel admettant une famille finie génératrice admet une base

Théorème (de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel admettant une famille génératrice finie

- 1 *Toute famille libre $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base.*
- 2 *De toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut extraire une base de E .*

C-à-d : Si $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de E . Alors il existe un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ soit une base de E

Dimension d'un espace vectoriel

Definition

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de **dimension finie**.

L'existence d'une base, c'est équivalent à l'existence d'une famille finie génératrice.

On va pouvoir parler de la dimension d'un espace vectoriel grâce au théorème suivant :

Théorème (Théorème de la dimension)

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Nous détaillerons la preuve un peu plus loin.

Definition

La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie E , notée $\dim E$, est par définition le nombre d'éléments d'une base de E .



Lemme

Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre et soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E . Alors $\text{Card}\mathcal{L} \leq \text{Card}\mathcal{G}$.

Ce lemme implique le résultat important :

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec $\dim E = n$. Alors :

- ① Toute famille libre de E a au plus n éléments.
- ② Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Cette proposition impliquera bien le théorème de la dimension :

Corollaire

Si E est un espace vectoriel admettant une base ayant n éléments, alors toute base de E possède n éléments.

Dimension d'un espace vectoriel

Il reste à énoncer un résultat important et très utile :

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E . Il y a équivalence entre :

- (i) $\mathcal{F}$ est une base de E ,
- (ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E ,
- (iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E .

Autrement dit, lorsque le nombre de vecteurs considéré est exactement égal à la dimension de l'espace vectoriel, l'une des deux conditions – être libre ou bien génératrice – suffit pour que ces vecteurs déterminent une base de E .

Pour la preuve voir le cours

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous espace vectoriel de E . Nous allons voir que : lorsque E est de dimension finie alors F aussi.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- ① Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie ;
- ② $\dim F \leq \dim E$;
- ③ $F = E \iff \dim F = \dim E$.

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2, les sous-espaces vectoriels de E sont :

- soit de dimension 0 : c'est alors le sous-espace $\{0\}$;
- soit de dimension 1 : ce sont les droites vectorielles, c'est-à-dire les sous-espaces $\mathbb{K}u = \text{Vect}\{u\}$ engendrés par les vecteurs non nuls u de E ;
- soit de dimension 2 : c'est alors l'espace E tout entier.

Corollaire

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que F est de dimension finie et que $G \subset F$. Alors :

$$F = G \iff \dim F = \dim G$$

Autrement dit, sachant qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer l'égalité des dimensions.

Théorème des quatre dimensions

Théorème (Théorème des quatre dimensions)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G des sous-espaces vectoriels de E . Alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Corollaire

Si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

Corollaire

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire.

Pour la preuve voir le cours

Un isomorphisme est une application linéaire bijective

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme entre espaces vectoriels de dimension finie alors $\dim E = \dim F$

Théorème

Soit $f : E \rightarrow F$ app linéaire où E et F de dimension finie

Si $\dim E = \dim F$, alors

f est bijective $\iff f$ est injective $\iff f$ est surjective

En effet : f injective $\iff \text{Ker } f = \{0\} \iff \dim \text{Im } f = \dim E$
 $\iff \dim \text{Im } f = \dim F \iff \text{Im } f = F \iff f$ surjective

Exemple :

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$
- f est-elle bijective ?
- Espace de départ et espace d'arrivée de mme dimension
- $(x, y) \in \text{Ker } f \iff f(x, y) = 0 \iff (x - y, x + y) = (0, 0)$
 $\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$
- $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$ donc f est injective
- Par le théorème précédent f est un isomorphisme

Rang d'une application linéaire : $f : E \rightarrow F$ une application linéaire
 $\text{Im}f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$

Proposition

Si E est de dimension finie, alors

- $\text{Im}f = f(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors

$$\text{Im}f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

La dimension de $\text{Im}f$ est appelée rang de f

$$\text{rg}(f) = \dim \text{Im}f = \dim \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Proposition

Si E et F sont de dimension finie alors

$$\text{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$$

Exemple

[Calcul du rang de f :] $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (3x - 4y + 2z, 2x - 3y - z)$$

- $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$
- $v_1 = f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $v_2 = f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$
 $v_3 = f(e_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- - 3 vecteurs donc $\text{rgf} \leq 3$
 - $\text{rgf} \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$
 - $f \neq 0$ donc $\text{rgf} \geq 1$
 - $\text{rgf} = 1$ ou 2
- v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, donc $\text{rgf} = 2$

Théorème du rang :

- $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire
- E est de dimension finie
- le noyau de f est $\text{Ker}f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- l'image de f est $\text{Im}f = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$

Théorème (du rang)

$$\dim E = \dim \text{Ker}f + \dim \text{Im}f$$

$$\dim E = \dim \text{Ker}f + \text{rg}f$$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4)$$

On calcule d'abord le noyau

$$\bullet (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Ker} f \iff f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{Ker} f = \left\{ (-2x_3 - x_4, -x_3 - x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\bullet \text{Ker} f = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet \dim \text{Ker} f = 2$$

Théorème du rang : $\dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker} f = 4 - 2 = 2$

Rang d'une famille de vecteurs :

- E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
- $\{v_1, \dots, v_p\}$ des vecteurs de E
- $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ est de dimension finie

Definition

Le rang de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_p$

$$rg(v_1, \dots, v_p) = \dim \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$$

Proposition

- 1 $0 \leq rg(v_1, \dots, v_p) \leq p$
- 2 $rg(v_1, \dots, v_p) \leq \dim E$

Exemple :

Quel est le rang de $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Dans $\mathbb{R}^4$ donc $rg(v_1, v_2, v_3) \leq 4$
- 3 vecteurs donc $rg(v_1, v_2, v_3) \leq 3$
- $v_1 \neq 0$ donc $rg(v_1, v_2, v_3) \geq 1$
- $rg(v_1, v_2, v_3) \geq rg(v_1, v_2) = 2$ car v_1 et v_2 pas colinéaires
- La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée ?
- Résoudre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$
- On trouve $v_1 - v_2 + v_3 = 0$, la famille est donc liée
- Ainsi $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$
- $rg(v_1, v_2, v_3) = \dim Vect(v_1, v_2, v_3) = 2$