Université Mohammed V **Année universitaire 2020/21**

Faculté des Sciences **Filière SMIA**

Rabat

Série n°4 de Mécanique

Exercice 1 :

On considère le repère fixe $\Re(O, x, y, z)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit une tige homogène (O_1A) de longueur ℓ, en mouvement autour de l'axe $\vec{Oz}$ avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\Re_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ un repère lié à la tige de base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ (repère relatif) tel que le plan ($x_1O_1y_1$) reste constamment parallèle au plan (xOy) et $\vec{k_1} = \vec{k}$. L'origine O_1 de $\Re_1$ se déplace le long de l'axe $\vec{Oz}$ tel que $\vec{OO_1} = \frac{1}{2}at^2\,\vec{k}$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur la tige (O_1A) et repéré dans $\Re_1$ par $\vec{O_1M} = x_1(t)\,\vec{i_1}$.

(*a* et ω étant des constantes positives).

1. Exprimer dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$:

a. la vitesse du point M par rapport au repère $\Re$.

b. la vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$.

c. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$.

d. le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2. Le repère $\Re_1$ est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.

3. En écrivant le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 et les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$.

4. En appliquant le théorème du moment cinétique du point M, par rapport au point O_1, dans le repère $\Re_1$, retrouver les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$.

5. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re$.

6. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re_1$.

7. Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$.

8. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1.

Exercice 2 .

On considère le repère fixe $\Re(O, x, y, z)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal.

Soit une tige horizontale (OA), en mouvement autour de l'axe $\vec{Oz}$ avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\Re_1(O, \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$ le repère lié à la tige (repère relatif). Soit un anneau assimilé à un point matériel M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur la tige (*OA*) et repéré dans $\Re$ par ses coordonnées polaires ρ et φ . On suppose que $\rho(t = 0) = \rho_0$ et $\dot{\rho}(t = 0) = 0$.

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de M.

Donner la solution de cette équation en fonction de ρ_0 et ω .

2. Maintenant l'anneau est soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0 . Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en *O* et l'autre est attachée au point M. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans $\Re$, établir la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige en fonction de $\ddot{\rho}$, ρ, ρ_0, k, m et ω.

<u>Exercice 3 .</u>

Un point matériel M se déplace dans le champ de forces de la forme : $\vec{F} = (x - ay)\vec{i} + (3y - 2x)\vec{j}$

.

1) Calculer, en fonction du paramètre a, le travail de $\vec{F}$:

a) Si M se déplace en ligne droite à partir du point O(0,0) jusqu'au point A(2,4).

b) Si M se déplace de O en A suivant le trajet OA'A sachant que A' est la projection orthogonale de A sur l'axe Ox.

2) Pour quelle valeur de a, le travail de $\vec{F}$ devient-il indépendant du chemin suivi entre O et A ? Déterminer alors l'énergie potentielle E_p dont dérive $\vec{F}$.

<u>Exercice 4.</u>

Soit R(O,xyz) un référentiel orthonormé direct et galiléen, muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottements le long d'une tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xOy) autour de l'axe $\vec{Oz}$ avec une vitesse angulaire constante $\omega(\varphi = \omega t$ et $\omega > 0)$. M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = F\vec{e_\rho}$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\vec{OM} = at\,\vec{e_\rho}$ (t étant le temps et a une constante positive). $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.

Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$.

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ de M dans R en fonction de a, t et ω.

2) Déterminer $\vec{\sigma_O}(M/R)$ le moment cinétique en *O* du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans R.

3) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M.

4) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouvez les expressions des composantes de *R*.

5) Déterminer l'énergie cinétique $E_c(M/R)$ du point M dans R ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans R.

6) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

7) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de F.

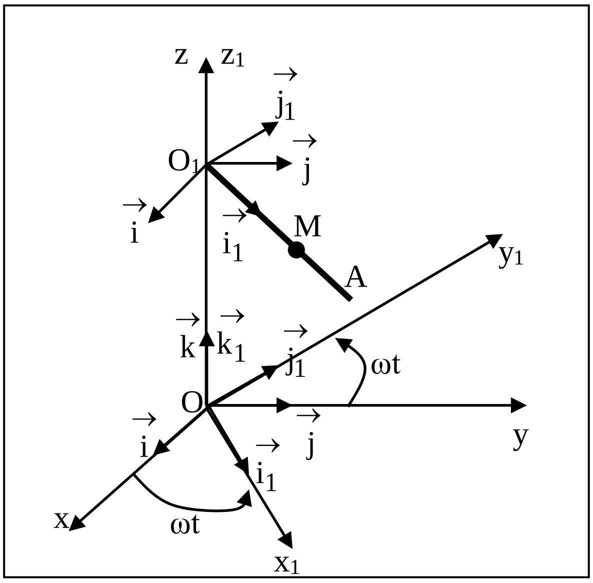
<u>Exercice 5 :</u>

Un point matériel est soumis à une force $\vec{F}$ telle que : $\vec{F} = (x - 2x^3)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Montrer que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on déterminera. Déterminer les positions d'équilibre et leurs stabilités.

Corrigé

Exercice 1.



$$\vec{i}_1 = \cos(\omega t)\ \vec{i} + \sin(\omega t)\ \vec{j}$$
$$\vec{j}_1 = -\sin(\omega t)\ \vec{i} + \cos(\omega t)\ \vec{j}$$

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\Re} = \omega \vec{j}_1\ ;\ \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{\Re} = -\omega \vec{i}_1\ ,\ \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{\Re} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_{1/}\Re = \omega\ \vec{k} = \omega \vec{k}_1$$

$$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M} = \frac{1}{2}at^2\ \vec{k} + x_1(t)\,\vec{i}_1\ \text{(a=cte>0)}$$

1) On exprime dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

a) La vitesse du point M par rapport au repère $\Re$:

$$\vec{v}(M/\Re) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\left(\frac{1}{2}at^2\ \vec{k}_1 + x_1(t)\,\vec{i}_1\right)}{dt}\right|_{\Re} = at\ \vec{k}_1 + \dot{x}_1(t)\,\vec{i}_1 + \omega x_1(t)\ \vec{j}_1$$

$$\Rightarrow\quad \vec{v}(M/\Re) = \dot{x}_1(t)\ \vec{i}_1 + \omega x_1(t)\ \vec{j}_1 + at\ \vec{k}_1$$

b) La vitesse du point M para rapport au repère $\Re_1$:

$$\vec{v}(M/\Re_1) = \left.\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right|_{\Re_1} = \left.\frac{d\left(x_1(t)\,\vec{i}_1\right)}{dt}\right|_{\Re} = \dot{x}_1(t)\,\vec{i}_1$$

c) Le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$: $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1) = \vec{0_1M} \wedge m\,\vec{V}(M/\Re_1) = m x_1(t)\ \vec{i}_1 \wedge \dot{x}_1(t)\ \vec{i}_1 = \vec{0}$

d) Le poids de M et les forces d’inertie d’entraînement et de Coriolis :

- $\vec{P} = m\ \vec{g} = -mg\,\vec{k}_1$: poids de M.
- $\vec{F}_e = -m\,\vec{\gamma}_e(M)$: Force d’inertie d’entraînement.
- $\vec{F}_c = -m\,\vec{\gamma}_c(M)$: Force d’inertie de Coriolis.

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge (\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{O_1M})$$

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \left.\frac{d^2\,\vec{OO_1}(\Re_1/\Re)}{dt^2}\right|_{\Re} = \frac{d^2\left(\frac{1}{2}at^2\,\vec{k}\right)}{dt^2} = a\,\vec{k} = a\,\vec{k_1}$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt} \wedge \vec{O_1M} = \vec{0} \wedge \vec{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge (\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{O_1M}) = \omega\vec{k_1} \wedge (\omega\vec{k_1} \wedge x_1\vec{i_1}) = -\omega^2 x_1\vec{i_1}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}_e(M) = a\vec{k_1} - \omega^2 x_1\vec{i_1}, \qquad \Rightarrow \quad \vec{F_e} = m\omega^2 x_1\vec{i_1} - ma\vec{k_1}$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v_r}(M) = 2\omega\vec{k_1} \wedge \dot{x}_1\vec{i_1} = 2\omega\dot{x}_1\vec{j_1}, \qquad \Rightarrow \quad \vec{F_c} = -m2\omega\dot{x}_1\vec{j_1}.$$

2) Le repère $\Re_1$ est en mouvement de rotation par rapport au repère fixe $\Re$ (galiléen), donc $\Re_1$ est non galiléen.

3) Principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) appliqué au point M dans $\Re_1$:

$\Re_1$ est non galiléen donc : $m\,\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \sum\vec{F_{ext}} + \vec{F_e} + \vec{F_c}$

$\sum\vec{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{R}$ où $\vec{R} = R_1\vec{i_1} + R_2\vec{j_1} + R_3\vec{k_1}$

N. B. : On exprime la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ pour faire apparaître sa composante tangentielle (tangente à la trajectoire).

Mouvement sans frottement $\Rightarrow$ la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire $R_1=0$.

$$\Rightarrow \quad \vec{R} = R_2\vec{j_1} + R_3\vec{k_1}$$

Le P.F.D. dans $\Re_1$ s'écrit : $m\ddot{x}_1\vec{i_1} = -mg\vec{k_1} + R_2\vec{j_1} + R_3\vec{k_1} + mx_1\omega^2\vec{i_1} - ma\vec{k_1} - 2m\omega\dot{x}_1\vec{j_1}$.

$$\Rightarrow \quad (m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2)\vec{i_1} + (mg - R_3 + ma)\vec{k_1} - (R_2 - 2m\omega\dot{x}_1)\vec{j_1} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2 = 0 \\ R_2 - 2m\omega\dot{x}_1 = 0 \\ mg - R_3 + ma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2 = 0 & \text{équation du 2d ordre vérifiée par } x_1 \\ \left.\begin{array}{l} R_2 = 2m\omega\dot{x}_1 \\ R_3 = mg + ma \end{array}\right\} & \Rightarrow \vec{R} = 2m\omega\dot{x}_1\vec{j_1} + m(g+a)\vec{k_1} \end{cases}$$

4. Théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$:

N. B. : Pour appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\Re_1$, il est préférable de choisir un point fixe dans $\Re_1$:

$\Re_1$ est non galiléen et O_1 est fixe dans $\Re_1$, donc :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt}\right|_{\Re_1} = \vec{m}_{O_1}(\sum \vec{F}_{ext}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c) = \vec{0}$$

$$\vec{m}_{O_1}(\sum \vec{F}_{ext}) = \vec{m}_{O_1}(\vec{P}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \vec{O_1M} \wedge \vec{P} + \vec{O_1M} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{P}) = \vec{O_1M} \wedge \vec{P} = x_1\, \vec{i}_1 \wedge (-mg\, \vec{k}_1) = mgx_1\, \vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \vec{O_1M} \wedge \vec{R} = x_1\, \vec{i}_1 \wedge R_2\, \vec{j}_1\ x_1\, \vec{i}_1 \wedge R_3\, \vec{k}_1 = mgx_1\, \vec{j}_1 = x_1 R_2\, \vec{k}_1 - x_1 R_3\, \vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) = \vec{O_1M} \wedge \vec{F}_e = x_1\, \vec{i}_1 \wedge (mx_1\omega^2\, \vec{i}_1 - ma\, \vec{k}_1) = max_1\, \vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c) = \vec{O_1M} \wedge \vec{F}_c = x_1\, \vec{i}_1 \wedge (-2m\omega\, \ddot{x}_1\, \vec{j}_1 = -2m\omega x_1\, \ddot{x}_1\, \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \quad mgx_1\, \vec{j}_1 + x_1 R_2\, \vec{k}_1 - x_1 R_3\, \vec{j}_1 + max_1\, \vec{j}_1 - 2m\omega x_1\, \dot{x}_1\, \vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad (mgx_1 - x_1 R_3 + max_1)\, \vec{j}_1 + (x_1 R_2 - 2m\omega x_1\, \dot{x}_1)\, \vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} mgx_1 - x_1 R_3 + max_1 = 0 \\ x_1 R_2 - 2m\omega x_1\, \dot{x}_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_3 = m(g+a) \\ R_2 = 2m\omega\, \dot{x}_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \vec{R} = 2m\omega\, \dot{x}_1\, \vec{j}_1 + m(g+a)\, \vec{k}_1$$

5. Energie potentielle de M par rapport à $\Re$:

Dans le repère $\Re$, la seule force dérivant d'une énergie potentielle (force conservative) est le poids de M ($\vec{P}$). Ainsi l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère $\Re$ est : $E_p(M/\Re) = E_p(\vec{P}/\Re)$.

$$dE_p(M/\Re) = dE_p(\vec{P}/\Re) = -dW(\vec{P}/\Re) = -\vec{P}.d\vec{OM} = mg\, \vec{k}.(dx\, \vec{i} + dy\, \vec{j} + dz\, \vec{k})$$

$$\Rightarrow \quad dE_p(M/\Re) = mgdz \quad \Rightarrow \quad E_p(M/\Re) = mgz + cte.$$

Ou bien : $\vec{P} = -\vec{grad}(E_p) \quad \rightarrow \quad -mg\, \vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial E_p}{\partial x} = mg \quad (1), \qquad \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \ (2)\ , \qquad -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0\ (3)$$

$$(1) \Rightarrow \ E_p = -mgz + C_1(y,z) \quad , \qquad (2) \Rightarrow \ \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow C_1(y,z) = Cte \ \Rightarrow \quad E_p = -mgz + Cte$$

6. Energie potentielle de M par rapport à $\Re_1$:

$$\vec{F}_e = m\omega^2 x_1\, \vec{i}_1 - ma\, \vec{k}_1\ ,$$

$$\vec{rot}(\vec{F}_e) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & & m\omega^2 x_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \wedge & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & & ma \end{vmatrix} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \Re_1$$

$$\Rightarrow \quad E_p(M/\Re_1) = E_p(\vec{F}_e/\Re_1) + E_p(\vec{P}/\Re_1)$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{F_c}$ par rapport à $\Re_1$:

$$dE_p(\vec{F_e}/\Re_1) = -dW(\vec{F_e}/\Re_1) = -\vec{F_e}.d\vec{OM} = (-mx_1\omega^2\,\vec{i_1} + ma\,\vec{k_1}).(dx_1\,\vec{i_1} + dy_1\,\vec{j_1} + dz_1\,\vec{k_1})$$

$$M \in (O_1x_1)\forall t \Rightarrow dy_1 = dz_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow dE_p(\vec{F_e}/\Re_1) = (-mx_1\omega^2\,\vec{i_1} + ma\,\vec{k_1})dx_1\,\vec{i_1}$$

$$\Rightarrow dE_p(\vec{F_e}/\Re_1) = -mx_1\omega^2 dx_1 \quad \Rightarrow \quad E_p(\vec{F_e}/\Re_1) = -\frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{P}$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_p(\vec{P}/\Re_1) = -dW(\vec{P}/\Re_1) = -\vec{P}.d\vec{O_1M} = -mg\,\vec{k_1}.(dx_1\,\vec{i_1} + dy_1\,\vec{j_1} + dz_1\,\vec{k_1})$$

$$M \in (O_1x_1)\forall t \Rightarrow dy_1 = dz_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow dE_p(\vec{P}/\Re_1) = -mg\,\vec{k_1}.dx_1\,\vec{i_1} = 0$$

$$E_p(\vec{P}/\Re_1) = cte$$

$$\Rightarrow \quad E_p(M/\Re_1) = -\frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

7) <u>Energie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$:</u>

$$E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}mv^2(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m|v(M/\Re_1)|^2 = \frac{1}{2}m\,\dot{x}_1^2$$

8) Théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$:

$$\Re_1 \text{ est non Galiléen} \Rightarrow \quad dE_c(M/\Re_1) = dW(\sum \vec{F}_{ext}/\Re_1) + dW(\sum \vec{F_e}/\Re_1)$$

$$\left[dW(\sum \vec{F_c}/\Re_1) = 0 \right]$$

$$\sum \vec{F}_{ext}/\Re_1) = \vec{P} + \vec{R} \quad \text{avec} \quad \vec{R} = R_2\,\vec{j_1} + R_3\,\vec{k_1}$$

$$\Rightarrow \quad dE_c(M/\Re_1) = dW(\vec{P}/\Re_1) + dW(\vec{R}/\Re_1) + dW(\vec{F_e}/\Re_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{P}/\Re_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{R}/\Re_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{F_e}/\Re_1)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = P(\vec{P}/\Re_1) + P(\vec{R}/\Re_1) + P(\vec{F_e}/\Re_1) \quad (P = \text{puissance})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = mx\,\dot{x}_1\,\ddot{x}_1$$

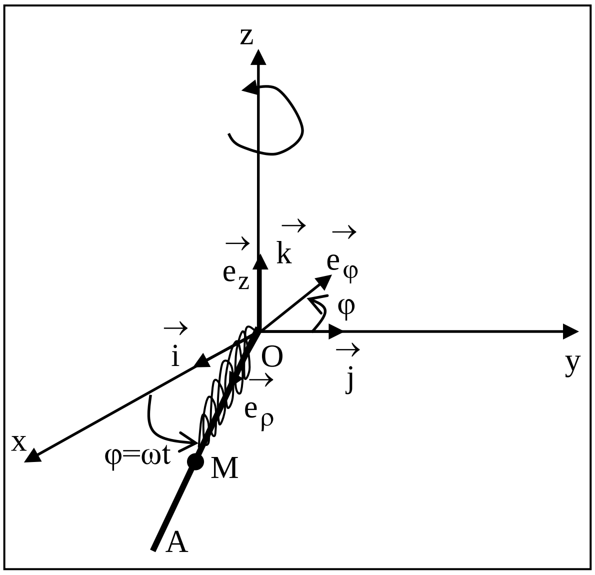
$$P(\vec{P}/\Re_1) = \vec{P}.\vec{v}(M/\Re_1) = -mg\,\vec{k_1}.\dot{x}_1\,\vec{i}_1 = 0$$

$$P(\vec{R}/\Re_1) = \vec{R}.\vec{v}(M/\Re_1) = (R_2\,\vec{j_1} + R_3\,\vec{k_1}).\dot{x}_1\,\vec{i}_1 = 0$$

$$P(\vec{F_e}/\Re_1) = \vec{F_e}.\vec{v}(M/\Re_1) = (mx_1\omega^2\,\vec{i_1} - ma\,\vec{k_1}).\dot{x}_1\,\vec{i}_1 = mx_1\omega^2\,\dot{x}_1$$

$$m\,\dot{x}_1\,\ddot{x}_1 = mx_1\omega^2\,\dot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \text{on retrouve l'équation différentielle : } \ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$$

Exercice 2 :



1. Application du théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re$:

<u>Vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au repère $\Re$:</u>

- $$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\,\vec{OM}}{dt/\Re} = \frac{d(\rho\,\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$$

- $$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\,\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt/\Re} = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\,\vec{e}_\rho + 2\,\dot{\rho}\,\omega\,\vec{e}_\varphi$$

<u>Energie mécanique de M par rapport au repère $\Re$:</u>

- $$E_c(M/\Re) = \frac{1}{2}m\,\vec{v}(M/\Re)^2 = \frac{1}{2}m\,\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2$$

- $$dE_p(\vec{P}/\Re) = -\vec{P}.d\vec{OM} = mg\,\vec{e}_z(d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z) = mgdz \quad , \quad dz = 0 \;\Rightarrow\; E_p(M/\Re) = cte$$

$$E_m(M/\Re) = E_c(M/\Re) + E_p(M/\Re) = \frac{1}{2}m\,\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + cte$$

<u>Application du théorème de l'énergie cinétiqueque dans le repère $\Re$:</u>

$$\frac{dE_c(M/\Re)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon}/\Re) + P(\vec{P}/\Re) = P(\vec{R}/\Re) = \vec{R}.\vec{v}(M/\Re) = (R_\varphi\,\vec{e}_\varphi + R_z\,\vec{e}_z).(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = R_\varphi\rho\omega$$

$$P(\vec{P}/\Re) = -mg\,\vec{e}_z.(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\left(\vec{F}_{ncon} = \text{forces non conservatives}\right)$$

$$\vec{R} = R_\rho\,\vec{e}_\rho + R_\varphi\,\vec{e}_\varphi + R_z\,\vec{e}_z \text{ , mouvement sans frottements} \Rightarrow R_\rho = 0 \rightarrow \vec{R} = R_\varphi\,\vec{e}_\varphi + R_z\,\vec{e}_z$$

Théorème du moment cinétique ou P. F. D. : $R_\varphi = 2m\,\dot{\rho}\,\omega$ et $R_z = mg \Rightarrow \quad P(\vec{F}_{ncon}/\Re) = 2m\rho\,\dot{\rho}\,\omega^2$

$$\frac{dE_c(M/\Re)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + cte\right)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho} = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2 \;\rightarrow\; \ddot{\rho} + \omega^2\rho = 2\rho\omega^2 \;\rightarrow\; \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

La solution de cette équation est sous la forme : $\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$$\rho(t=0) = \rho_0 \text{ et } \dot{\rho}(t=0) = 0 \;\rightarrow\; A + B = \rho_0 \text{ et } A\omega - B\omega = 0$$

$$A = B = \frac{\rho_0}{2} \;\rightarrow\; \rho(t) = \frac{\rho_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \frac{\rho_0}{2}ch(\omega t)$$

2) Application du principe fondamental de le dynamique dans le repère $\Re$:

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{\gamma}(M/\Re)$,

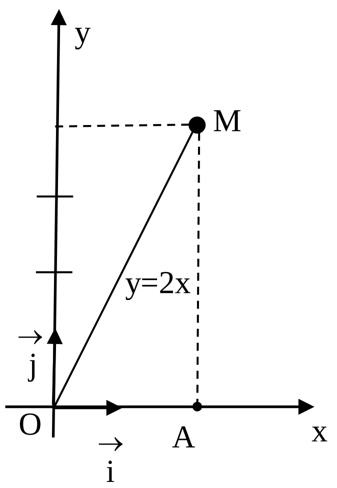
$\vec{R} = R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{e}_z$ (Réaction de la tige sur M), $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$ (Poids de M)

$\vec{F} = -k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho$: (force de rappel appliquée par le ressort sur M)

$$\rightarrow \quad -mg\,\vec{e}_z + R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{e}_z - k(\rho-\rho_0)\vec{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\rho} + (\frac{k}{m} - \omega^2)\rho = \frac{k}{m}\rho_0$$

C'est la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige lorsque M soumis à une force de rappel du ressort.

Exercice 3:



$\vec{F} = (x - ay)\,\vec{i} + (3y - 2x)\,\vec{j}$; $\quad d\vec{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$

$dW = (x - ay)dx + (3y - 2x)dy$

a) $\quad$ y=2x $\rightarrow$ $\quad dy = 2dx$

$dW = (x - 2ax)dx + (6x - 2x)2dx = (9x - 2ax)dx$

$$W = \int_0^2 (9x - 2ax)dx = (9 - 2a)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = (18 - 4a)$$

b) $\quad W_{OA} = W_{OA'} + W_{A'A}$

$W_{OA'}$: $\quad 0 \le x \le 2$; $y = 0$, $dy = 0$ $\Rightarrow$ $W_{OA'} = \int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2J$

$W_{A'A}$: $\quad x = 2$; $dx = 0$, $0 \le y \le 4$ $\Rightarrow$ $W_{A'A} = \int_0^4 (3y - 4)dy = \left[3\frac{y^2}{2} - 4y\right]_0^4 = 8J$

$W_{OA} = W_{OA'} + W_{A'A} = 10J$

2°) 18-4a=10 donc a=2.

$\vec{F} = (x - ay)\,\vec{i} + (3y - 2x)\,\vec{j}$; $\quad \vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$.

$$\vec{F}=-\frac{\partial E_p(x,y)}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial E_p(x,y)}{\partial y}\vec{j}\ ; \qquad \Rightarrow -\frac{\partial E_p(x,y)}{\partial x}=x-2y \Rightarrow E_p(x,y)=-\frac{x^2}{2}+2xy+C_1(y).$$

$$\frac{\partial E_p(x,y)}{\partial y}=2x+\frac{dC_1(y)}{dy}=2x-3y \Rightarrow C_1(y)=-3\frac{y^2}{2}+K.$$

D'où : $E_p(x,y)=-\frac{x^2}{2}+2xy-\frac{3y^2}{2}+K.$

Exercice 4 :

1°) $\vec{V}(M/R)=\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = a\vec{e_\rho}+at\omega\vec{e_\varphi}$

$$\vec{\gamma}(M/R)=\left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right|_R=-at\omega^2\vec{e_\rho}+2a\omega\vec{e_\varphi}$$

2°) $\vec{\sigma_O}(M/R)=\vec{OM}\wedge m\vec{V}(M/R)=at\vec{e_\rho}\wedge m(a\vec{e_\rho}+at\omega e\varphi)=ma^2t^2\omega\vec{k}$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma_O}(M/R)}{dt}\right|_R=2ma^2t\omega\vec{k}$$

3°) Moments dynamiques :

$$\vec{\delta_O}(\vec{F})=\vec{OM}\wedge m\vec{F}=at\vec{e_\rho}\wedge F\vec{e_\rho}=0$$

$$\vec{\delta_O}(\vec{P})=\vec{OM}\wedge\vec{P}=at\vec{e_\rho}\wedge(-mg)\vec{k}=atmg\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{\delta_O}(\vec{R})=\vec{OM}\wedge\vec{R}=at\vec{e_\rho}\wedge(R_\varphi\vec{e_\rho}+R_z\vec{k})=atR_\varphi\vec{k}-atR_z\vec{e_\varphi}=at(-R_z\vec{e_\varphi}+R_\varphi\vec{k})$$

4° Théorème du moment cinétique :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma_O}(M/R)}{dt}\right|_R=\vec{\delta_O}(\vec{F})+\vec{\delta_O}(\vec{P})+\vec{\delta_O}(\vec{R})$$

$$\Rightarrow \qquad 2ma^2t\omega\vec{k}=at((mg-R_z)\vec{e_\varphi}+R_\varphi\vec{k}) \qquad \Rightarrow \qquad R_\varphi=2ma\omega \qquad \text{et} \qquad R_z=mg.$$

5°) $\vec{E_c}(M/R)=\frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/R)=\frac{1}{2}m(a^2+a^2t^2\omega^2)$ et $\frac{d\vec{E_c}(M/R)}{dt}=ma^2\omega^2t.$

6°) **Puissances :**

$$P(\vec{F})=\vec{F}.\vec{V}(M/R)=F\vec{e_\rho}.(a\vec{e_\rho}+at\omega\vec{e_\kappa})=Fa$$

$$P(\vec{P})=\vec{P}.\vec{V}(M/R)=-mgF\vec{k}.(a\vec{e_\rho}+at\omega\vec{e_\kappa})=O$$

$$P(\vec{R})=\vec{R}.\vec{V}(M/R)=(R_\varphi\vec{e_\rho}+R_z\vec{k}).(a\vec{e_\rho}+at\omega\vec{e_\kappa})=R_\varphi at\omega=2ma^2\omega^2t.$$

7°) **Théorème de l'énergie cinétique :**

$$\frac{dE_c(M/R)}{dt} = P(\vec{F}) + P(\vec{P}) + P(\vec{R})$$

$$\Rightarrow \quad m a^2\omega^2 t. = Fa + 2ma^2\omega^2 t \qquad \Rightarrow \qquad Fa = -ma\omega^2 t.$$

Exercice 5 :

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = x - 2x^3 \quad ; \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = y \;; \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial x} = z$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - 2x^3 \quad \Rightarrow \quad U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + f(y,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y \Leftrightarrow \quad f(y,z) = \frac{y^2}{2} + g(z) \quad \text{et} \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = z = \frac{dg(z)}{dz} \Rightarrow g(z) = \frac{z^2}{2} + cte$$

D'où $\quad U(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + cte.$

Postions d'équilibre : $F_x=F_y=F_z=0$

Donc $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0.$

Nous avons alors 3 positions d'équilibre : $(0,0,0)$; $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$; $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$

Stabilité d'équilibre:

Variation de $\frac{\partial U}{\partial x} = x - 2x^3$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\partial U}{\partial x}$	+	0	-	0	+	0	-
U	↗		↘		↗		↘

$U_{max}\{x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}, \quad U_{min}\{x = 0\}$

Variation de $\frac{\partial U}{\partial y} = y$ et $\frac{\partial U}{\partial z} = z.$

y		0	
$\frac{\partial U}{\partial y}$	-	0	+
U	↘		↗

z		0	
$\frac{\partial U}{\partial z}$	-	0	+
U	↘		↗

U n'est jamais maximal (E_P minimale) pour les trois Coordonnées à la fois, donc l'équilibre est instable.