Université Mohammed V **Année universitaire 2020/2021**

Faculté des Sciences **Filière SMIA**

Rabat

Série n°3 de Mécanique

Exercice 1 :

On considère deux référentiels $\Re$ (O,xyz) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\Re$'(O,x'y'z') de base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ dont les axes Oz et Oz' sont confondus. R' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire ω constante. Soit une particule M animée d'un mouvement uniforme de vitesse $V_0 \vec{e}_\rho$ le long de l'axe Ox'. A l'instant t=0, $\vec{OM}(t=0) = \vec{r}(t=0) = \vec{0}$.

1) A l'instant t > 0, déterminer et représenter sur une figure :
   a) La vitesse relative et d'entraînement de M. En déduire sa vitesse absolue.
   b) Les accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis de M. En déduire son accélération absolue.
2) Donner les expressions des composantes tangentielle et normale de l'accélération de M par rapport au repère absolu. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire de M.

Exercice 2 :

On définit un repère fixe R(O,xyz) muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Une masselotte A peut coulisser sur une tige (T). On note r la distance OA entre l'extrémité de la tige et la masselotte A considérée comme ponctuelle.

Cette tige, inclinée de l'angle α constant par rapport à l'axe Oz du repère d'observation R(O,xyz), tourne uniformément à la vitesse angulaire ω autour de Oz.

On note R' (O,x'y 'z) le repère orthonormé direct lié à la tige.

a) Exprimer le vecteur OA en fonction de r et α, dans la base B' liée à R'. En déduire la vitesse de A dans R', que l'on exprimera dans B'.

b) Caractériser le mouvement de R' par rapport à R (vitesse de l'origine, vecteur rotation).

c) Déterminer l'expression de la vitesse d'entraînement, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis, liées à A, dans le mouvement de R' par rapport à R.

d) Déterminer, par application des lois de composition des mouvements, les expressions de la vitesse et de l'accélération de A dans R.

Exercice 3 :

Soient $R_0(O,XYZ)$ un repère orthonormé fixe de base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ et $R_1(O,xyz)$ un repère orthonormé mobile de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Un point matériel M, initialement en O, mobile sur un cercle (C) de centre O' et de rayon a ($\overrightarrow{OO'} = a\vec{k}$) avec une vitesse angulaire ω constante. Le cercle (C), placé dans le plan vertical (yOz) du repère R_1, est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical $\overrightarrow{OZ}$ à la vitesse angulaire Ω constante. Les axes $\overrightarrow{OZ}$ et $\overrightarrow{Oz}$ sont confondus à tout instant.

1) Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
2) Calculer, dans la même base,
   a) les vitesses relative et d'entraînement du point M.
   b) les accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis du point M.
3) Quel est l'hodographe du mouvement du point M dans le repère R_1.

Exercice 4 :

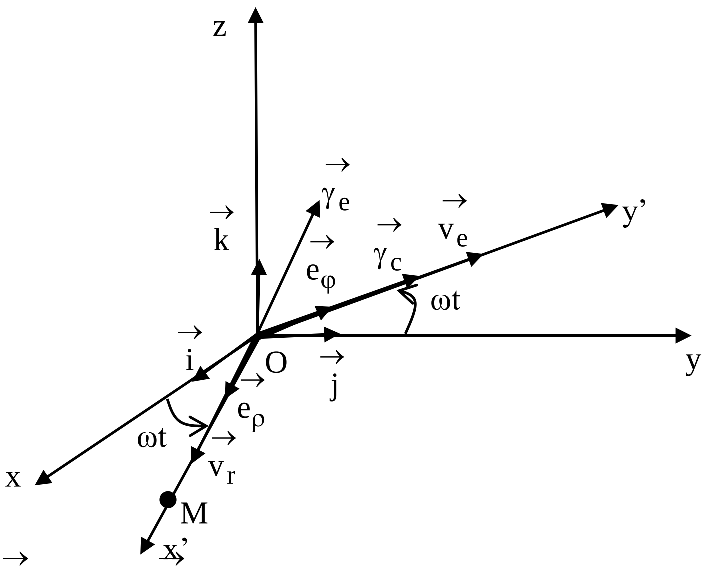
On considère le repère $\Re(Oxyz)$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω . Dans ce plan (P), un anneau M assimilé à un point matériel de masse m se meut sans frottement, dans le champ de pesanteur, sur un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon r. La position de O_1 est définie par les paramètres a et b (a et b sont des constantes), celle de M est définie par l'angle θ (t) formé par le vecteur $\overrightarrow{O_1M}$ et l'axe $\overrightarrow{O_1z}$. On désigne par $\Re_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au plan (P) (repère relatif) tel que le plan $(x_1O_1z_1)$ reste constamment dans le plan (P) et $(\vec{k}_1 = \vec{k})$. On suppose que $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ à t=0.

Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

a. le vecteur rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$: $\vec{\Omega}(\Re_1 / \Re)$;
b. les vitesses relative, d'entraînement et absolue du point M;
c. les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue du point M;

Corrigé de la série 3

Exercice 1 :



1) a) **Vitesse relative :**

$$\vec{OM} = r(t)\,\vec{e}_\rho = V_0 t\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R'} = V_0\,\vec{e}_\rho$$

Vitesse d'entraînement :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{OM} = \omega\,\vec{k}\wedge V_0 t\,\vec{e}_\rho = \omega V_0 t\,\vec{e}_\varphi$$

Vitesse absolue :

$$\vec{Va}(M) = \vec{Vr}(M) + \vec{Ve}(M) = V_0\,\vec{e}_\rho + \omega V_0 t\,\vec{e}_\varphi$$

De plus on a : $r = V_0 t$ et $\varphi = \omega t$. En éliminant le temps, on aura $\omega r = \varphi V_0$ d'où :

$$\vec{Va}(M) = V_0\,\vec{e}_\rho + \varphi V_0\,\vec{e}_\varphi = V_0(\vec{e}_\rho + \varphi\,\vec{e}_\varphi)$$

b) **Accélération relative :**

$$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{0} \quad \text{car} \quad \vec{V}_r(M) = \vec{Cte}\,.$$

Accélération d'entraînement :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\Omega}(R'/R)\wedge(\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{OM}) = \omega\,\vec{k}\wedge(\omega\,\vec{k}\wedge V_0 t\,\vec{e}_\rho) = -\omega^2 V_0 t\,\vec{e}_\rho = -\omega^2 r\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = -\omega\varphi V_0\,\vec{e}_\rho$$

Accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\,\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\vec{V}_r(M) = 2\omega\,\vec{k}\wedge V_0\,\vec{e}_\rho = 2\omega V_0\,\vec{e}_\varphi$$

Accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) = -\omega\varphi V_0\,\vec{e}_\rho + 2\omega V_0\,\vec{e}_\varphi = \omega V_0(-\varphi\,\vec{e}_\rho + 2\,\vec{e}_\varphi)$$

2) $$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_t(M) + \vec{\gamma}_n(M) = \gamma_t\,\vec{\tau} + \gamma_n\,\vec{n} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}$$

On a : $V = V_0\sqrt{1+\varphi^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma_t = \dfrac{\omega V_0 \varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$

Et $\gamma_n = \dfrac{V_0^2(1+\varphi^2)}{R_c}$

De plus :

$$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 \Rightarrow \frac{V_0^4(1+\varphi^2)^2}{R_c^2} = \omega^2 V_0^2(\varphi^2+4) - \frac{\omega^2 V_0^2 \varphi^2}{1+\varphi^2} \Rightarrow R_c^2 = \frac{V_0^2(1+\varphi^2)^3}{\omega^2(\varphi^2+2)^2}$$

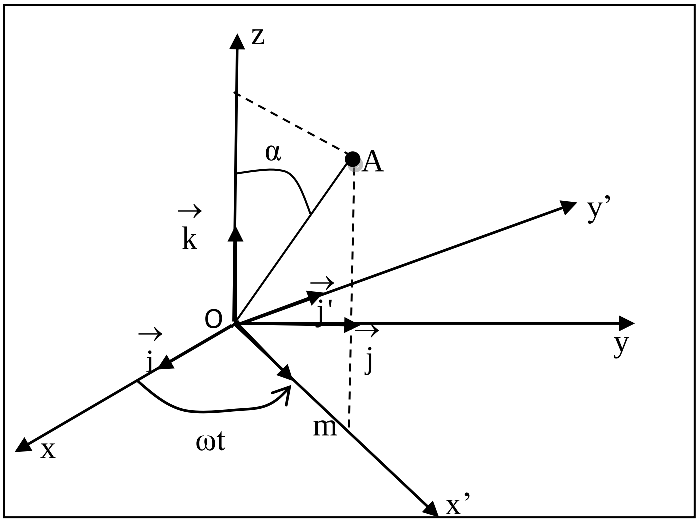
D'où : $$R_c = \frac{V_0(1+\varphi^2)^{3/2}}{\omega(\varphi^2+2)}$$

<u>Exercice 2 :</u>

a) Base $B' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k})$

$$\vec{OA} = r(t)\sin\alpha\, \vec{i}' + r(t)\cos\alpha\, \vec{k}$$

$$\vec{V}(A/R) = \vec{v}_r(A) = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{R'}$$



$$\vec{v}_r(A) = \dot{r}(t)\sin\alpha\, \vec{i}' + \dot{r}(t)\cos\alpha\, \vec{k}\,.$$

b) R' est en mouvement de rotation par rapport à R. $\vec{\omega}(R'/R) = \omega\, \vec{k}$

c) Le mouvement d'entraînement est un Mouvement circulaire uniforme.
La trajectoire du point coïncidant avec M à chaque instant est le cercle de rayon $r(t)\sin\alpha$ et centré sur la projection orthogonale H de A sur l'axe $\vec{Oz}$.

$$\Rightarrow \vec{v}_e(A) = r(t)\omega\sin\alpha\, \vec{j}'$$

Ou bien

- $$\vec{v}_e(A) = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge \vec{O'A} = \omega\, \vec{k} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{v}_e(A) = \omega\, \vec{k} \wedge (r\sin\beta\, \vec{i}' + r\cos\alpha\, \vec{k}) = \omega r(t)\sin\alpha\, \vec{j}'$$

- $$\vec{\gamma}_e(A) = -\omega^2\, \vec{HA} = -\omega^2 r(t)\sin\alpha\, \vec{i}'$$
- $$\vec{\gamma}_c(A) = 2\omega\, \vec{k} \wedge \vec{v}_r(A) = 2\omega\, \vec{k} \wedge (\dot{r}(t)\sin\alpha\, \vec{i}' + \dot{r}(t)\cos\alpha\, \vec{k}) = 2\omega \dot{r}(t)\sin\alpha\, \vec{j}'$$

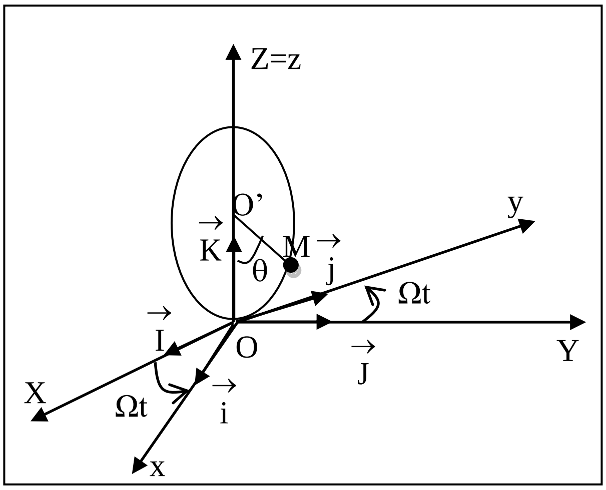
d) $\vec{v}_a(A) = \vec{v}_r(A) + \vec{v}_e(A)$.

$\vec{v}_a(A) = \dot{r}(t)\sin\alpha\ \vec{i'} + r(t)\omega\sin\alpha\ \vec{j'} + \dot{r}(t)\cos\alpha\ \vec{k}$.

$\vec{\gamma}_a(A) = \vec{\gamma}_r(A) + \vec{\gamma}_e(A) + \vec{\gamma}_c(A)$.

$\vec{\gamma}_a(A) = (\ddot{r}(t) - \omega^2 r(t))\sin\alpha\ \vec{i'} + 2\omega\dot{r}(t)\sin\alpha\ \vec{j'} + \ddot{r}(t)\cos\alpha\ \vec{k}$.

Exercice 3.



1°) $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = a\sin\theta\ \vec{j} + a(1-\cos\theta)\ \vec{k}$.

2°) $\vec{v}_r(M) = \left.\dfrac{d\,\vec{OM}}{dt}\right|_{R_1} = a\,\dot{\theta}\cos\theta\ \vec{j} + a\,\dot{\theta}\sin\theta\ \vec{k}$.

$\vec{\gamma}_r(M) = \left.\dfrac{d\,\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_{R_1} = a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\ \sin\theta)\ \vec{j} + a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\ \cos\theta)\ \vec{k}$.

$\vec{\omega}(R_1/R_0) = \Omega\ \vec{k}$.

$\vec{v}_e(M) = \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{OM} = \Omega\ \vec{k} \wedge \vec{OM} = -a\Omega\sin\theta\ \vec{i}$

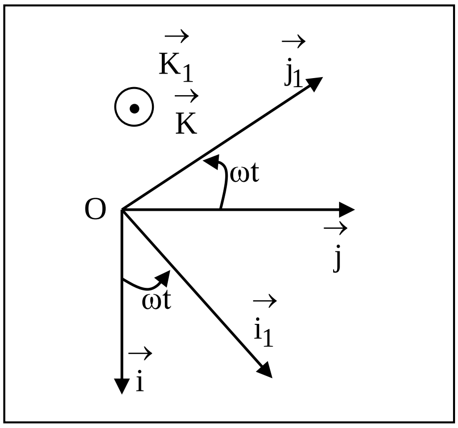
$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = -a\Omega^2\sin\theta\ \vec{j}$.

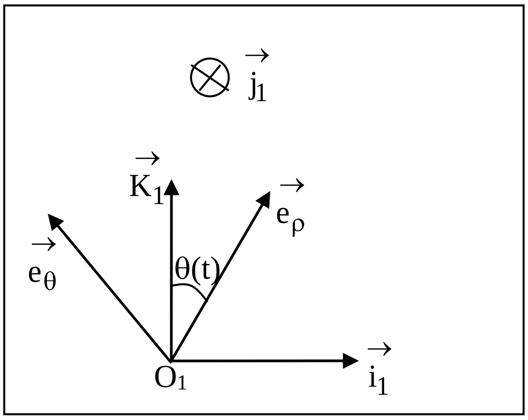
$\vec{\gamma}_c(M) = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(M) = -2a\,\dot{\theta}\,\Omega\cos\theta\ \vec{i}$.

3°) $\vec{v}_r(M) = \vec{OP} = \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = a\,\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = a\,\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = a^2\,\dot{\theta}^2$.

L'hodographe du mouvement de M est le cercle de rayon $a\,\dot{\theta}$ et de centre O(0,0), situé dans le plan (V_yOV_z).

Exercice 4 :





$$\vec{i}_1 = \cos(\omega t)\,\vec{i} + \sin(\omega t)\,\vec{j}\ ,\ \vec{j}_1 = -\sin(\omega t)\,\vec{i} + \cos(\omega t)\,\vec{j}\quad ,\quad \vec{k}_1 = \vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\Re} = \omega\,\vec{j}_1\ ,\quad \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{\Re} = -\omega\,\vec{i}_1\ ,\quad \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{\Re} = 0$$

$$\vec{e}_\rho = \sin(\theta)\,\vec{i}_1 + \cos(\theta)\,\vec{k}_1\ ,\qquad \vec{e}_\theta = -\cos(\theta)\,\vec{i}_1 + \sin(\theta)\,\vec{k}_1\quad ,$$

$$\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\Re 1} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\ ,\quad \left.\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_{\Re 1} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\rho\ ,\quad \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{\Re 1} = \vec{0}$$

$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$, $\vec{OO_1} = a\,\vec{i}_1 + b\,\vec{k}_1$, $\vec{O_1M} = r\,\vec{e}_\rho$, (r, a et b sont des constantes).

On exprime dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

a. Le vecteur rotation de R1 par rapport à R : $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$:

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\Re} = \omega\,\vec{j}_1 = \omega\vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1\ ,\quad \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{\Re} = -\omega\,\vec{i}_1\ \omega\vec{k}_1 \wedge \vec{j}_1\ ,,\quad \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{\Re} = \omega\vec{k}_1 \wedge \vec{k}_1\ ,0$$

$$\Rightarrow\qquad \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \omega\vec{k}_1$$

b. Les vecteurs vitesse relative, d'entraînement et absolue du point M :

- Vitesse relative :

$$\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M/\Re_1) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\Re_1} = \left.\frac{d(r\,\vec{e}_\rho)}{dt}\right|_{\Re_1} = r\left.\frac{d\,\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\Re_1} = -r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = r\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{i}_1 - r\,\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{k}_1$$

- Vitesse d'entraînement : $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_1/\Re) + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}$

$$\vec{v}(O_1/\Re_1) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d(a\,\vec{i}_1 + b\,\vec{k}_1)}{dt}\right|_{\Re} = a\left.\frac{d\,\vec{i}_1}{dt}\right|_{\Re} + b\left.\frac{d\,\vec{k}_1}{dt}\right|_{\Re} = a\omega\,\vec{j}_1$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \omega\,\vec{k}_1 \wedge r\,\vec{e}_\rho = \omega\,\vec{k}_1 \wedge r(\sin(\theta)\,\vec{i}_1 + \cos(\theta)\,\vec{k}_1) = r\omega\sin(\theta)\,\vec{j}_1$$

$$\vec{v}_e(M) = (a\omega + r\omega\sin(\theta))\,\vec{j}_1$$

- Vitesse absolue :

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) = r\,\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{i}_1 - r\,\dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{k}_1 + (a\omega + r\omega\sin(\theta))\,\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_a(M) = r\,\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{i}_1 + (a\omega + r\omega\sin(\theta))\,\vec{j}_1 - r\,\dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{k}_1$$

c. Les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue :

- $$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/\Re_1) = \left.\frac{d\,\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_{\Re_1} = \left.\frac{d(-r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)}{dt}\right|_{\Re_1} = -r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - r\,\dot{\theta}\left.\frac{d\,\vec{e}_\theta}{dt}\right|_{\Re_1} = -r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\gamma}_r = (r\,\ddot{\theta}\cos(\theta) - r\,\dot{\theta}^2\sin(\theta))\,\vec{i}_1 - (r\,\ddot{\theta}\sin(\theta) + r\,\dot{\theta}^2\cos(\theta))\,\vec{k}_1$$

- $$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \left.\frac{d\,\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt}\right|_{\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge (\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \left.\frac{d\,\vec{v}(O_1/\Re)}{dt}\right|_{\Re} = \frac{d(a\omega\,\vec{j}_1)}{dt} = -a\omega^2\,\vec{i}_1$$

$$\left.\frac{d\,\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt}\right|_{\Re} = \vec{O} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge (\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}) = \omega\,\vec{k}_1 \wedge r\omega\sin(\theta)\,\vec{j}_1 = -r\omega^2\sin(\theta)\,\vec{i}_1$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = -\omega^2(a + r)\sin(\theta)\,\vec{i}_1$$

- $\vec{\gamma}_c(M) = 2(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}_r(M) = 2\omega \vec{k}_1 \wedge (r\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{i}_1 - r\dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{k}_1) = 2r\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{j}_1$

- $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$

$$\vec{\gamma}_a = (r\ddot{\theta}\cos(\theta) - r\dot{\theta}^2\sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2\sin(\theta))\,\vec{i}_1 + 2r\omega\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{j}_1 - (r\ddot{\theta}\cos(\theta) + r\dot{\theta}^2\cos(\theta))\,\vec{k}_1$$